MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2022

Zürich, Lausanne, Lugano
18. Dezember 2021

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt O und seien X, A, Y drei Punkte auf k in dieser Reihenfolge, sodass die Tangente zum Umkreis des Dreiecks OXA durch X und die Tangente zum Umkreis von OAY durch Y parallel sind. Zeige, dass $\angle XAY = 120°$ gilt, sofern A sich auf dem kleineren Kreisbogen XY befindet.

G2) Sei k_1 ein Kreis mit Mittelpunkt M und ℓ eine Gerade, die k_1 in A berührt. Ein Kreis k_2 im Innern von k_1 berührt ℓ ebenfalls in A. Sei P ein anderer Punkt auf ℓ. Die zweite Tangente an k_1 durch P berührt k_1 im Punkt T. Sei B der Schnittpunkt von AT und k_2 und sei C der Schnittpunkt von PB und k_2. Zeige, dass $ATCM$ ein Sehnenviereck ist.

Kombinatorik

K1) Eine Schulklasse mit $n \geq 2$ Kindern macht mehrere Gruppenfotos. Für jede Gruppe mit mindestens einem Kind gibt es genau ein Foto, auf welchem exakt diese Gruppe zu sehen ist (und keine weiteren Personen). Die Fotos werden nun in verschiedenen Zimmern der Schule aufgehängt, sodass jedes Kind maximal auf einem Foto pro Zimmer erscheint.

(i) Zeige, dass dies möglich ist, wenn die Schule 2^{n-1} Zimmer hat.

(ii) Zeige, dass dies unmöglich ist, wenn die Schule weniger als 2^{n-1} Zimmer hat.

K2) 924 Fans des Liechtensteiner Fussballteams versammeln sich, um Autogramme ihrer Lieblingsspieler zu erhalten. Das Liechtensteiner Fussballteam besteht aus 11 Spielern und jeder Fan hat genau 6 Lieblingsspieler. Jeder der Fans kommt entweder aus der Schweiz oder aus Liechtenstein selbst, und keine zwei Fans aus demselbem Land haben dieselben 6 Lieblingsspieler. Am Schluss hat jeder Fan das Autogramm von genau einem seiner Lieblingsspieler erhalten. Zeige, dass es einen Spieler gibt, der sowohl einem Schweizer als auch einem Liechtensteiner ein Autogramm gegeben hat.

Zahlentheorie

Z1) Bestimme alle Paare (m, p) von einer positiven ganzen Zahl m und einer Primzahl p, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$p^2 + pm = m^3.$$

Z2) Sei n eine positive ganze Zahl und d ein positiver Teiler von n. Angenommen, der Bruch

$$\frac{d^2 + d + 1}{n + 1}$$

hat einen ganzzahligen Wert. Zeige, dass dieser Wert gleich 1 ist.

Viel Glück!