Deuxième tour 2022

Zurich, Lausanne, Lugano

18 décembre 2021

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit k un cercle de centre O et soit X, A, Y trois points sur k dans cet ordre, tels que la tangente au cercle circonscrit du triangle OXA passant par X et la tangente au cercle circonscrit du triangle OAY passant par Y soient parallèles. Montrer que $\angle XAY = 120°$ si A se trouve l'arc mineur XY.

Remark : L'arc mineur XY est le plus petit des arcs du cercle k reliant X et Y.

G2) Soit k_1 un cercle de centre M et ℓ une droite tangente à k_1 au point A. Soit k_2 un cercle à l'intérieur de k_1 également tangent à ℓ au point A. Soit P un point sur ℓ différent de A. La seconde tangente à k_1 passant par P intersecte k_1 au point T. Soit B la second intersection de AT et k_2, et soit C la seconde intersection de PB et k_2. Montrer que $ATCM$ est un quadrilatère cyclique.

Combinatoire

C1) Dans une école, une classe de $n \geq 2$ élèves prennent plusieurs photos de groupe. Pour chaque groupe d'au moins un élève, il y a exactement une photo contenant ce groupe spécifique. Les photos sont maintenant suspendues dans différentes salles de l'école de telle manière que chaque élève apparaît dans au plus une photo par salle.

(i) Montrer que cela est possible si l'école contient 2^{n-1} salles.

(ii) Montrer que cela n'est pas possible si l'école contient strictement moins de 2^{n-1} salles.

C2) Lors d'une séance de dédicaces, 924 fans de l'équipe de football du Liechtenstein se sont rassemblés afin d'obtenir les autographes de leurs joueurs préférés. Chacun de ces fans est originaire soit du Liechtenstein, soit de la Suisse. L'équipe de football est composée de 11 joueurs, et chaque fan a exactement 6 joueurs favoris. Deux fans originaires d'un même pays ne partagent pas le même groupe de joueurs favoris, et au final chaque fan a obtenu exactement un autographe de l'un de ses joueurs préférés. Montrer qu'il existe un joueur qui a donné un autographe à la fois à un Suisse et à un Liechtensteinois.

Théorie des nombres

N1) Déterminer toutes les paires (m, p) qui consistent en un nombre entier strictement positif m et un nombre premier p et qui satisfont l'équation

$$p^2 + pm = m^3.$$

N2) Soient n un nombre entier strictement positif et d un diviseur positif de n. Montrer que si l'expression

$$\frac{d^2 + d + 1}{n + 1}$$

est un nombre entier, alors elle vaut 1.

Bonne chance !