MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

?? 2021

Zoom

19 dicembre 2020

Durata : 3 ore
Difficoltà : Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.
Punti : Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

G1) Sia O il centro del cerchio circoscritto ad un triangolo acutangolo ABC. La retta AC interseca il cerchio circoscritto del triangolo ABO una seconda volta in S. Dimostra che la retta OS è perpendicolare alla retta BC.

G2) Sia ABC un triangolo acutangolo tale che $BC > AC$. L'asse di simmetria del segmento AB interseca la retta BC in X e la retta AC in Y. Sia P la proiezione di X su AC e sia Q la proiezione di Y su BC. Mostra che la retta PQ interseca il segmento AB nel suo punto medio.

Osservazione: P è la proiezione di X sulla retta AC significa che P si trova sulla retta AC e che PX è perpendicolare alla retta AC.

Calcolo combinatorio

C1) Anaëlle possiede $2n$ pietre numerate $1, 2, 3, \dots, 2n$ e due scatole, una blu e una rossa. Vuole mettere tutte le $2n$ pietre dentro le due scatole così che le pietre k e $2k$ siano messe in due scatole differenti, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$. In quanti modi diversi lo può fare?

Osservazione: Dei punti parziali sono attribuiti per il calcolo del numero dei modi possibili qualora sia fatto per un qualsiasi caso particolare con $n \geq 3$.

C2) Siano $n \geq 4$ e $k, d \geq 2$ dei numeri naturali tali per cui $k \cdot d \leq n$. Gli n partecipanti delle Olimpiadi di Matematica sono seduti intorno ad un tavolo rotondo, aspettando che Patrick arrivi. Quando Patrick arriva, non è affatto contento della situazione in quanto essa viola le regole del distanziamento sociale. Pertanto, sceglie k degli n partecipanti e dice loro di restare, mentre agli altri ordina di andarsene dalla stanza. La scelta viene fatta in modo tale che tra ogni coppia dei k partecipanti rimanenti ci siano almeno $d - 1$ sedie vuote. In quanti modi diversi Patrick può fare la sua scelta, sapendo che all'inizio ogni sedia era occupata?

Teoria dei numeri

N1) Dimostra che per ogni numero naturale $n \geq 3$ esistono dei numeri interi strettamente positivi $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tali per cui

$$a_k \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

per tutti i $k = 1, 2, \dots, n$.

N2) Trova tutti i numeri interi $n \geq 2$ tali che ogni divisore $d > 1$ di n verifica

$$d^2 + n \mid n^2 + d.$$

Buona fortuna!