Deuxième tour 2021

Zoom

19 décembre 2020

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle aigu ABC. La droite AC coupe le cercle circonscrit du triangle ABO une deuxième fois en S. Montrer que la droite OS est perpendiculaire à la droite BC.

G2) Soit ABC un triangle aigu avec $BC > AC$. La médiatrice du segment AB coupe la droite BC en X et la droite AC en Y. Soient P la projection de X sur AC et Q la projection de Y sur BC. Montrer que la droite PQ coupe le segment AB en son milieu.

Remarque : P est la projection de X sur la droite AC signifie que P se trouve sur la droite AC et que PX est perpendiculaire à la droite AC.

Combinatoire

C1) Anaëlle possède $2n$ pierres numérotées $1, 2, 3, \ldots, 2n$ ainsi que deux boîtes, une bleue et une rouge. Elle veut ranger chacune des $2n$ pierres dans l'une des deux boîtes de sorte que les pierres k et $2k$ soient dans des boîtes différentes pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Combien Anaëlle a-t-elle de manières de le faire ?

Remarque : Des points partiels sont attribués pour le calcul du nombre de possibilités pour n'importe quel cas particulier où $n \geq 3$.

C2) Soient $n \geq 4$ et $k, d \geq 2$ des nombres entiers tel que $k \cdot d \leq n$. Les n participants des Olympiades de Mathématiques sont assis autour d'une table ronde et attendent Patrick. Quand Patrick arrive, il n'est pas content de la situation, car elle ne respecte pas les règles de distance sociale. Il choisit alors k parmi les n participants qui peuvent rester et demande aux autres de partir, de sorte qu'entre deux des k participants restants, il y ait toujours au moins $d - 1$ chaises vides. Combien Patrick a-t-il de manières de le faire, si toutes les chaises étaient occupées au début ?

Théorie des nombres

N1) Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 3$, il existe des nombres entiers strictement positifs $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tels que

$$a_k \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

pout tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

N2) Trouver tous les nombres entiers $n \geq 2$ tels que tout diviseur $d > 1$ de n vérifie

$$d^2 + n \mid n^2 + d.$$

Bonne chance!