MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour préliminaire 2020

Lausanne, Lugano, Zurich
7 décembre 2019

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit k un cercle de centre O. Soient A, B, C et D quatre points distincts sur k, dans cet ordre, tels que AB est un diamètre de k. Le cercle circonscrit au triangle COD intersecte AC une deuxième fois en P. Montrer que OP et BD sont parallèles.

G2) Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. Les bissectrices en B et C s'intersectent en un point I à l'intérieur du triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle BIC intersecte une deuxième fois AB en X et intersecte une deuxième fois AC en Y. Montrer que CX est parallèle à BY.

Combinatoire

C1) On considère un carré blanc 5×5 composé de 25 carrés unité. De combien de manières différentes peut-on colorier un ou plusieurs carrés unité en noir de telle manière que la surface noire obtenue soit un rectangle ?

C2) Dans le village Roche vivent 2020 personnes. Un jour, le fameux mathématicien Georges de Rham fait les observations suivantes :

- Chaque villageois connaît un autre villageois du même âge que lui.
- Chaque groupe de 192 personnes dans le village contient toujours au moins trois personnes qui ont le même âge.

Montrer qu'il existe un groupe de 22 villageois qui ont tous le même âge.

Théorie des nombres

N1) Si $p \geq 5$ est un nombre premier, soit q le plus petit nombre premier tel que $q > p$ et soit n le nombre de diviseurs positifs de $p + q$ (1 et $p + q$ inclus).

a) Montrer que quel que soit le choix de p, le nombre n est toujours plus grand ou égal à 4.

b) Trouver la véritable valeur minimale m que peut prendre n parmi tous les choix possibles pour p. C'est-à-dire :

- Donner un exemple d'un nombre premier p pour lequel la valeur m est atteinte.
- Montrer qu'il n'existe pas de nombre premier p tel que n soit strictement inférieur a m.

N2) Soit p un nombre premier et soient a, b, c et n des entiers strictement positifs tels que $a, b, c < p$ et tels que les trois relations suivantes soient satisfaites :

$$p^2 \mid a + (n-1) \cdot b, \qquad p^2 \mid b + (n-1) \cdot c, \qquad p^2 \mid c + (n-1) \cdot a.$$

Montrer que n n'est pas un nombre premier.

Bonne chance!