MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Turno preliminare 2019

Losanna, Lugano, Zurigo
8 dicembre 2018

Durata : 3 ore
Difficoltà : Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.
Punti : Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

G1) Sia k un cerchio con centro O e siano A, B, C tre punti giacenti su k in modo tale che $\angle ABC > 90°$. La bisettrice dell'angolo $\angle AOB$ interseca il cerchio circoscritto al triangolo BOC nel punto D. Mostrare che D giace sulla retta AC.

G2) Sia k_1 un cerchio e l una linea intersecante k_1 in due punti distinti chiamati A e B. Sia k_2 un secondo cerchio non contenuto (all'esterno di) in k_1 toccante k_1 tangenzialmente in C e l tangenzialmente in D. Sia T la seconda intersezione di k_1 con la linea CD. Mostrare che $AT = TB$.

Calcolo combinatorio

C1) Dato un intero positivo n, Paolo scrive tutti i $2^n - 1$ sottoinsiemi non vuoti di $\{1, \ldots, n\}$ su una linea. In seguito, Paolo scrive sotto ogni singolo insieme il prodotto di tutti i loro elementi. Infine, scrive l'inverso di tutti i numeri nella seconda linea e calcola la loro somma. Determinare il valore della somma (in funzione di n) ottenuto da Paolo.

Esempio: per $n = 3$, Paolo ottiene:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\{1\} & & \{2\} & & \{3\} & & \{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} & & \{1,2,3\} & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1\cdot 2 = 2 & & 1\cdot 3 = 3 & & 2\cdot 3 = 6 & & 1\cdot 2\cdot 3 = 6 & & \\
\frac{1}{1} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{6} & & = 3.
\end{array}$$

C2) Sia n un intero positivo. Una squadra di volley composta da n uomini e n donne sta per giocare. Ad ogni giocatore è assegnata una delle posizioni $1, 2, \ldots, 2n$. Tra queste posizioni, solo la 1 e la $n + 1$ giacciono fuori dal prato. Durante la partita i giocatori effettuano delle rotazioni come segue: il giocatore in postazione i si muove nella postazione $i + 1$ (il giocatore con la posizione $2n$ andrà ad accasarsi alla postazione 1). In quanti modi possiamo assegnare le posizioni di partenza in modo tale che ci siano sempre **almeno** $n - 1$ donne sul prato, indipendentemente dal numero di rotazioni occorse durante la partita?

Osservazione: due configurazioni iniziali sono considerate differenti se almeno un giocatore occupa una posizione differente nelle due configurazioni.

Teoria dei numeri

N1) Determinare tutte le coppie di interi positivi (a, b) tali che

$$ab + 2 = a^3 + 2b.$$

N2) Determinare tutti gli interi positivi $n \geq 2$ tali da poter essere scritti come

$$n = k^2 + d^2,$$

dove k è il più piccolo divisore di n diverso da 1 e d è un (qualsiasi) divisore di n.

Buona fortuna!