Vorrunde 2019

Lausanne, Lugano, Zürich

8. Dezember 2018

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt O und seien A, B und C drei Punkte auf k mit $\angle ABC > 90°$. Die Winkelhalbierende von $\angle AOB$ schneide den Umkreis des Dreiecks BOC ein zweites Mal in D. Zeige, dass D auf der Geraden AC liegt.

G2) Sei k_1 ein Kreis und l eine Gerade, die k_1 in zwei verschiedenen Punkten A und B schneidet. Sei k_2 ein weiterer Kreis ausserhalb von k_1, der k_1 in C und l in D berührt. Sei T der zweite Schnittpunkt von k_1 und der Geraden CD. Zeige, dass $AT = TB$ gilt.

Kombinatorik

K1) Für eine natürliche Zahl n schreibt Quirin alle $2^n - 1$ nichtleeren Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf eine Zeile. Dann schreibt er unter jede Menge das Produkt ihrer Elemente. Danach schreibt er von jeder Zahl den Kehrwert auf und zählt nun alle diese zusammen. Welche Summe wird er (abhängig von n) erhalten?

Beispiel: Für $n = 3$ macht er die folgenden Schritte:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\{1\} & & \{2\} & & \{3\} & & \{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} & & \{1,2,3\} & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1\cdot 2 = 2 & & 1 \cdot 3 = 3 & & 2 \cdot 3 = 6 & & 1\cdot 2\cdot 3 = 6 & & \\
\frac{1}{1} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{6} & & = 3.
\end{array}$$

K2) Sei n eine natürliche Zahl. Ein Volleyballteam bestehend aus n Frauen und n Männern stellt sich für ein Spiel auf. Dabei besetzt jedes Teammitglied eine der Positionen $1, 2, \ldots, 2n$, wobei sich genau die Positionen 1 und $n + 1$ ausserhalb des Spielfelds befinden. Während des Spiels rotieren alle Teammitglieder, wobei jeweils von der Position i auf die Position $i + 1$ gewechselt wird (respektive von $2n$ auf 1). Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Startaufstellung, sodass immer mindestens $n - 1$ Frauen auf dem Spielfeld sind, egal wie oft rotiert wird?

Bemerkung: Zwei Startaufstellungen sind unterschiedlich, wenn mindestens ein Teammitglied eine andere Position besetzt.

Zahlentheorie

Z1) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (a, b), welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$ab + 2 = a^3 + 2b.$$

Z2) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, die eine Darstellung der Form

$$n = k^2 + d^2$$

haben, wobei k der kleinste Teiler von n grösser als 1 und d ein beliebiger Teiler von n ist.

Viel Glück!