MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour préliminaire 2019

Lausanne, Lugano, Zurich
8 décembre 2018

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit k un cercle de centre O et soient A, B et C trois points sur k tels que $\angle ABC > 90°$. La bissectrice de $\angle AOB$ coupe le cercle circonscrit au triangle BOC une deuxième fois en D. Montrer que D se trouve sur la droite AC.

G2) Soient k_1 un cercle et l une droite qui coupe k_1 en deux points distincts A et B. Soit k_2 un deuxième cercle à l'extérieur de k_1 qui touche k_1 tangentiellement en C et qui touche l tangentiellement en D. Soit T la deuxième intersection de la droite CD avec k_1. Montrer que $AT = TB$.

Combinatoire

C1) Soit n un entier strictement positif. Maurice écrit sur une même ligne tous les $2^n - 1$ sous-ensembles non-vides de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ensuite, en-dessous de chaque sous-ensemble, il écrit le produit de ses éléments. Finalement, il écrit les inverses des nombres présents sur la deuxième ligne et il en calcule la somme. Quelle sera la valeur de la somme (en fonction de n) que Maurice va obtenir ?

Exemple : pour $n = 3$, Maurice obtient

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \{1\} & & \{2\} & & \{3\} & & \{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} & & \{1,2,3\} & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 1\cdot 2 = 2 & & 1\cdot 3 = 3 & & 2\cdot 3 = 6 & & 1\cdot 2\cdot 3 = 6 & & \\ \frac{1}{1} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{6} & & = 3. \end{array}$$

C2) Soit n un entier strictement positif. Une équipe de volley-ball qui se compose de n hommes et n femmes se prépare à jouer. Chaque joueur est assigné une des positions $1, 2, \ldots, 2n$. Seules les positions 1 et $n+1$ se situent à l'extérieur du terrain. Pendant la partie, les joueurs effectuent des rotations de telle manière que le joueur à la position i passe à la position $i+1$ (respectivement de la position $2n$ à la position 1). De combien de manières les positions peuvent-elles être initialement assignées de sorte qu'il y ait toujours au moins $n-1$ femmes sur le terrain, peu importe le nombre de rotations ?

Remarque : deux positions initiales sont différentes, si au moins un joueur y occupe deux positions différentes.

Théorie des nombres

N1) Déterminer toutes les paires d'entiers strictement positifs (a, b) telles que

$$ab + 2 = a^3 + 2b.$$

N2) Déterminer tous les entiers strictement positifs $n \geq 2$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$n = k^2 + d^2,$$

où k est le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1 et où d est un diviseur de n quelconque.

Bonne chance !