SMO - Vorrunde 2018

Lausanne, Lugano, Zürich - 13. Januar 2018

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei ABC ein Dreieck und sei $\gamma = \angle ACB$, sodass $\gamma/2 < \angle BAC$ und $\gamma/2 < \angle CBA$ gilt. Sei D der Punkt auf der Strecke BC, sodass $\angle BAD = \gamma/2$ gilt. Sei E der Punkt auf der Strecke CA, sodass $\angle EBA = \gamma/2$ gilt. Ausserdem sei F der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ und der Strecke AB. Zeige, dass $EF + FD = AB$ gilt.

G2) Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreismittelpunkt O, sodass die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen. Sei g die Spiegelung der Diagonalen AC an der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$. Zeige, dass der Punkt O auf der Geraden g liegt.

Kombinatorik

K1) Das SMO-Land hat 1111 Einwohner. Die elf Spieler der Liechtensteiner Nationalmannschaft verteilen Autogramme an alle Einwohner, wobei kein Einwohner ein Autogramm doppelt erhält (d.h. jeder Einwohner erhält von jedem Spieler entweder kein oder ein Autogramm).

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, welche Autogramme ein Einwohner erhalten kann?

(b) Nach dem Verteilen stellen die Einwohner fest, dass keine zwei von ihnen von genau denselben Spielern Autogramme erhalten haben. Zeige, dass es zwei Einwohner gibt, die zusammen von jedem Spieler genau ein Autogramm besitzen.

K2) Ein Hochhaus hat 7 Lifte, wobei aber jeder nur in 6 Stockwerken hält. Trotzdem gibt es für je zwei Stockwerke immer einen Lift, der die beiden Stockwerke direkt verbindet.

Zeige, dass das Hochhaus höchstens 14 Stockwerke haben kann, und dass ein solches Hochhaus mit 14 Stockwerken tatsächlich realisierbar ist.

Zahlentheorie

Z1) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Seien $d_1, \ldots, d_r$ alle verschiedenen positiven Teiler von n, die kleiner sind als n selbst. Bestimme alle n, für die gilt:

$$\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \neq n.$$

Bemerkung: Für $n = 18$ *hätte man beispielsweise* $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6, d_5 = 9$ *und somit* $\mathrm{kgV}(1, 2, 3, 6, 9) = 18$.

Z2) Seien m und n natürliche Zahlen und p eine Primzahl, sodass $m < n < p$ gilt. Weiter gelte:

$$p \mid m^2 + 1 \quad \text{und} \quad p \mid n^2 + 1.$$

Zeige, dass gilt:

$$p \mid mn - 1.$$