SMO - Vorrunde 2017

Lausanne, Lugano, Zürich - 14. Januar 2017

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

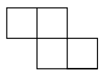
Geometrie

G1) Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$ und Umkreis k. Die Tangente an k durch A schneide BC in P. Die Winkelhalbierende von $\angle APB$ schneide AB in D und AC in E. Zeige, dass das Dreieck ADE gleichschenklig ist.

G2) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB. Ein Kreis um C schneide die Strecke AB zweimal in den Punkten P und Q, wobei P zwischen A und Q liegt. Sei R der Punkt auf der Strecke BC mit $\angle RAC = \frac{1}{2}\angle PCQ$ und sei S der Punkt auf der Strecke AC mit $\angle CBS = \frac{1}{2}\angle PCQ$. Weiter sei T der Schnittpunkt der Strecken CP und AR, und U der Schnittpunkt der Strecken CQ und BS. Zeige, dass $RSTU$ ein Sehnenviereck ist.

Kombinatorik

K1) Was ist die maximale Anzahl an Skew-Tetrominos, die auf einem 8×9 Rechteck überlappungsfrei platziert werden können?



Bemerkung: Die Tetrominos dürfen gedreht und gespiegelt werden.

K2) Seien $m, n \geq 2$ natürliche Zahlen. Wir haben vier Farben und wollen jedes Feld eines $m \times n$ Rechtecks mit einer davon einfärben, sodass in jedem 2×2 Quadrat alle vier Farben vorkommen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

Bemerkung: Wir zählen zwei Möglichkeiten als verschieden, wenn es mindestens ein Feld gibt, das unterschiedliche Farben erhalten hat.

Zahlentheorie

Z1) Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\mathrm{kgV}(m,n) - \mathrm{ggT}(m,n) = \frac{mn}{5}.$$

Z2) Seien a und b natürliche Zahlen, sodass

$$\frac{3a^2 + b}{3ab + a}$$

eine ganze Zahl ist. Bestimme alle Werte, die obiger Ausdruck annehmen kann.