SMO - Vorrunde

Belinzona, Lausanne, Zürich - 16. Januar 2016

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten A und C. Sei B der zweite Schnittpunkt von k_1 und der Tangente an k_2 in A, und sei D der zweite Schnittpunkt von k_2 und der Tangente an k_1 in C. Zeige, dass AD und BC parallel sind.

2. Quirin hat n Klötze mit den Höhen 1 bis n und möchte diese so nebeneinander aufstellen, dass sich seine Katze von links nach rechts über sie hinwegbewegen kann. Die Katze kann dabei jeweils auf den nächsten Klotz springen, falls dieser tiefer oder um 1 höher ist. Zu Beginn wird die Katze auf den Klotz am linken Ende gesetzt.
Wie viele Möglichkeiten hat Quirin, die Klötze in einer solchen Reihe aufzustellen?

Bemerkung: Für $n = 5$ *ist* $3-4-5-1-2$ *eine Möglichkeit,* $1-3-4-5-2$ *jedoch nicht.*

3. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass für alle positive Teiler d von n gilt:

$$d + 1 \,|\, n + 1.$$

4. Bei 22 Mathematikwettbewerben werden jeweils 5 Preise verteilt. Nachdem alle Wettbewerbe durchgeführt sind, bemerken die Organisatoren, dass es für jede Kombination von zwei Wettbewerben genau einen gemeinsamen Preisträger gibt. Zeige, dass ein Teilnehmer bei allen Wettbewerben einen Preis gewonnen hat.

5. Sei ABC ein Dreieck mit $AB < AC$. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneidet die Seite BC im Punkt D. Sei k der Kreis, der durch D geht und die Seiten AC und AB in den Punkten E respektive F berührt. Sei G der zweite Schnittpunkt von k und BC und sei S der Schnittpunkt der Strecken EG und DF. Zeige, dass AD und BS senkrecht aufeinander stehen.

Viel Glück!