OSM - Examen préliminaire

Lausanne, Lugano, Zurich - le 12 janvier 2013

Durée : 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Un groupe de 2013 personnes s'assied autour d'une table ronde, en se répartissant de manière régulière. Une fois assises, ces personnes constatent qu'un carton indiquant un nom est posé à chacune des places et que personne ne s'est assis à la place où son nom figure. Montrer qu'elles peuvent tourner la table de sorte qu'au moins deux personnes se retrouvent avec le carton correct devant elles.

2. Soit M_1 et M_2 les centres de deux cercles k_1 et k_2 respectivement. Supposons que les deux cercles se coupent de manière perpendiculaire en un point P. De plus soit Q l'intersection de k_1 avec le segment M_1M_2. Montrer que l'intersection de la perpendiculaire au segment M_1M_2 passant par le point M_2 et de la droite PQ se trouve sur le cercle k_2.

3. Un nombre naturel est appelé sympathique si les chiffres de sa représentation dans le système décimal satisfont les deux conditions suivantes :

a) Chacun des chiffres $0, 1, \dots, 9$ apparait au plus une fois.

b) Si A est un chiffre pair et B est un chiffre impair, alors il y a exactement $\frac{A+B-1}{2}$ autres chiffres entre A et B.

Combien y a-t-il de nombres sympathiques ?

4. Déterminer toutes les paires (m, n) de nombres naturels satisfaisant

$$(m+1)! + (n+1)! = m^2n^2.$$

5. Trouver le plus petit nombre naturel n satisfaisant la condition suivante : chaque sous-ensemble S à n éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 100\}$ contient au moins un nombre qui est la somme de trois autres éléments distincts de S.

Bonne chance !