SMO - Turno preliminare

Lugano, Losanna, Zurigo - 14 gennaio 2012

Durata : 3 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Determina tutte le coppie (m, n) di numeri naturali tali che $(m+1)(n+2)$ è divisibile per mn.

2. Considera $6n$ gettoni di $2n$ colori, tali che ci sono esattamente 3 gettoni di ogni colore. Questi gettoni devono essere ripartiti in due pile A e B di uguale grandezza in modo che in nessuna delle pile ci siano tre gettoni dello stesso colore. Quanti modi ci sono di farlo, se

a) l'ordine dei gettoni all'interno di una pila non ha importanza ?

b) l'ordine ha importanza ?

3. Siano A e B i punti d'intersezione di due cerchi k e l di centro rispettivamente K e L. Siano M e N i punti d'intersezione di k, rispettivamente l, con una retta passante per A, in modo che A si trovi tra M e N. Sia D il punto d'intersezione delle rette MK e NL. Dimostra che i punti M, N, B e D si trovano su un cerchio.

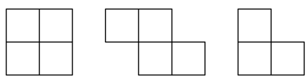
4. Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione aritmetica di numeri interi. Supponiamo che per ogni $1 \leq k \leq 50$ il numero a_k sia divisibile per k.

a) Dimostra che a_{51} è divisibile per 51 e che a_{52} è divisibile per 52.

b) a_{53} è sempre divisibile per 53 ?

La successione $a_1, a_2, \ldots$ è detta aritmetica se la differenza $a_{i+1} - a_i$ è la stessa per ogni i.

5. Una scacchiera di dimensioni 11×11 deve essere ricoperta senza buchi e senza sovrapposizioni con piastrelle di dimensione 2×2, Skew-Tetromini e L-Triomini. È permesso applicare rotazioni e simmetrie ai pezzi. Quanti L-Triomini sono necessari, al minimo ?



Buon lavoro !