SMO - Vorrunde

Lugano, Lausanne, Zürich - 14. Januar 2012

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, sodass $(m+1)(n+2)$ durch mn teilbar ist.

2. Gegeben sind $6n$ Chips in $2n$ verschiedenen Farben, sodass es von jeder Farbe genau 3 Chips hat. Diese Chips sollen auf zwei Stapel A und B verteilt werden, sodass beide Stapel dieselbe Anzahl Chips enthalten und kein Stapel drei gleichfarbige Chips enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun, wenn

a) die Reihenfolge der Chips innerhalb der Stapel keine Rolle spielt?
b) die Reihenfolge wichtig ist?

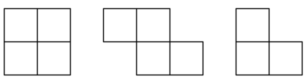
3. Seien A und B die Schnittpunkte zweier Kreise k und l mit Zentrum K respektive L. Seien M und N die Schnittpunkte von k respektive l mit einer Geraden durch A, sodass A zwischen M und N liegt. Sei D der Schnittpunkt der Geraden MK und NL. Zeige, dass die Punkte M, N, B und D auf einem Kreis liegen.

4. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine arithmetische Folge ganzer Zahlen. Nehme an, dass für $1 \leq k \leq 50$ jeweils a_k durch k teilbar ist.

a) Beweise, dass a_{51} durch 51 und a_{52} durch 52 teilbar ist.
b) Ist a_{53} immer durch 53 teilbar?

Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ist arithmetisch, falls die Differenz $a_{i+1} - a_i$ für alle i gleich ist.

5. Ein Brett der Grösse 11×11 soll mit Kacheln der Grösse 2×2, mit Skew-Tetrominos und mit L-Triominos überlappungsfrei bedeckt werden. Die Kacheln dürfen gedreht und gespiegelt werden. Wie viele L-Triominos werden dazu mindestens benötigt?



Viel Glück!