SMO - Turno preliminare

Lugano, Lausanne, Zürich - 8 gennaio 2011

Durata: 3 ore
Ogni esercizio vale 7 punti

1. Sia ABC un triangolo con $\angle CAB = 90°$. Sia L un punto sul lato BC. Sia M il punto d'intersezione del cerchio circoscritto al triangolo ABL con la retta AC, e sia N il punto d'intersezione del cerchio circoscritto al triangolo CAL con la retta AB. Si supponga che N si trova sul lato AB e che M si trova sul prolungamento del lato AC. Dimostra che L, M e N sono allineati.

2. Determina tutti i numeri naturali n tali che n^3 è il prodotto di tutti i divisori positivi di n.

3. Sulla lavagna sono scritti 11 numeri naturali. Dimostra che se possono scegliere alcuni di questi numeri (anche tutti) e tra questi piazzare i segni $+$ e $-$ in modo che il risultato sia divisibile per 2011.

4. Considera una linea di bus ciclica (cioè che forma un anello) che ha $n \geq 2$ fermate. Chiamiamo *tratto* il percorso tra due fermate successive. Ogni tratto può essere percorso nei due sensi. Una delle fermate si chiama Lugano. Un bus deve partire da Lugano, percorrere esattamente $n + 2$ tratti e terminare il suo percorso a Lugano. Deve inoltre passare per tutte le fermate almeno una volta. Il bus può invertire la direzione di marcia a ogni fermata. Quanti percorsi di questo tipo esistono?

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero iscritto tale che le immagini della retta AB riflessa rispetto alle bisettrici degli angoli $\angle CAD$ e $\angle CBD$ hanno un punto d'intersezione P. Sia O il centro del cerchio circoscritto a $ABCD$. Dimostra che OP è perpendicolare a CD.

Buon lavoro!