SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 8. Januar 2011

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Der Punkt L liegt auf der Seite BC. Der Umkreis des Dreiecks ABL schneidet die Gerade AC in M und der Umkreis des Dreiecks CAL schneidet die Gerade AB in N. Nehme an, N liege im Inneren der Seite AB und M auf der Verlängerung der Seite AC. Zeige, dass L, M und N auf einer Geraden liegen.

2. Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass n^3 das Produkt aller positiven Teiler von n ist.

3. An der Tafel stehen 11 natürliche Zahlen. Zeige, dass man aus diesen Zahlen einige (vielleicht alle) wählen und dazwischen die Zeichen $+$ und $-$ so platzieren kann, dass das Ergebnis durch 2011 teilbar ist.

4. Gegeben ist eine ringförmige Busroute mit $n \geq 2$ Haltestellen, welche in beide Richtungen befahren werden kann. Die Strecke zwischen zwei benachbarten Haltestellen nennen wir *Abschnitt*. Eine der Haltestellen heisst Zürich. Ein Bus soll in Zürich starten, dann exakt $n+2$ Abschnitte weit fahren und sich am Ende wieder in Zürich befinden. Dabei muss er jede Haltestelle mindestens einmal besuchen. Er kann bei jeder Haltestelle wenden. Wie viele mögliche Fahrtrouten gibt es?

5. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass sich die Spiegelungen der Geraden AB an den Winkelhalbierenden der Winkel $\angle CAD$ und $\angle CBD$ in einem Punkt P schneiden. Sei O das Zentrum des Umkreises von $ABCD$. Zeige, dass OP und CD rechtwinklig aufeinander stehen.

Viel Glück!