OSM - Examen préliminaire

Bellinzona, Lausanne, Zurich - le 9 janvier 2010

Durée : 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les solutions naturelles de l'équation

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c).$$

2. Soit g une droite dans le plan. Les cercles k_1 et k_2 se trouvent du même côté de g et sont tangent à g aux points A et B respectivement. Un autre cercle k_3 est tangent à k_1 en D et tangent à k_2 en C. Montrer que les deux assertions suivantes sont vérifiées :

(a) Le quadrilatère $ABCD$ est un quadrilatère inscrit.

(b) Le point d'intersection des droites BC et AD est sur k_3.

3. De combien de manières est-ce qu'on peut associer à chaque sommet d'un dé un des nombres $1, 2, 3, \ldots, 10$ de telle sorte que aucun nombre est utilisé plusieurs fois et que pour chaque face du dé, la somme des nombres des quatre sommets adjacents est impaire ?

4. Trouver toutes les paires (u, v) de nombres naturels, telles que

$$\frac{uv^3}{u^2 + v^2}$$

est une puissance d'un nombre premier.

5. Une croix suisse consiste en cinq carrés unité, un au centre et quatre aux côtés adjacents. Trouver le plus petit nombre naturel n qui a la propriété suivante : parmi n points quelconques à l'intérieur ou sur le bord de la croix suisse il y en a toujours deux qui sont à distance inférieure à 1.

Bonne chance !