SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 10. Januar 2009

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen $n > 1$, sodass $(n-1)!$ durch n teilbar ist.

2. Betrachte n Kinder, von denen keine zwei gleich gross sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Kinder in eine Reihe zu stellen, sodass jedes Kind ausser dem grössten einen Nachbarn besitzt, der grösser ist als es.

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 60°$. Die Punkte D und E liegen auf den Seiten AC bzw. AB. Die Geraden BD und CE schneiden den Umkreis von ABC in den weiteren Punkten X bzw. Y. Der Schnittpunkt von BD und CE sei S. Beweise, dass die Geraden BY und CX genau dann parallel sind, wenn $AESD$ ein Sehnenviereck ist.

4. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^{6a} = b^b.$$

5. Für welche natürlichen Zahlen m, n lässt sich ein $m \times n$-Rechteck mit lauter Quadraten der Seitenlänge 2 oder 3 lückenlos und überlappungsfrei bedecken?

Viel Glück!