SMO - Turno preliminare

Losanna, Zurigo - 14 gennaio 2006

Tempo a disposizione: 3 ore.
Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Trova tutte le triple (p, q, r) di numeri primi tali che anche le tre differenze

$$|p-q|, \quad |q-r|, \quad |r-p|$$

siano numeri primi.

2. Sia n un numero naturale. Determina il numero di sottoinsiemi $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$ per i quali non esistono coppie di elementi $x, y \in A$ tali che $x + y = 2n + 1$.

3. Nel triangolo $\triangle ABC$ sia D il punto di intersezione tra BC e la bisettrice dell'angolo $\sphericalangle BAC$. Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABC$ è nello stesso punto del centro della circonferenza inscritta nel triangolo $\triangle ADC$. Trova gli angoli del triangolo $\triangle ABC$.

4. Determina tutte le soluzione intere positive dell'equazione

$$\mathrm{mcm}(a, b, c) = a + b + c.$$

(L'abbreviazione *mcm* significa minimo comune multiplo.)

5. Considera una tavola di dimensioni $m \times n$, suddivisa in quadrati unitari. Un *triomino a L* è formato da tre quadrati unitari: un quadrato centrale e due quadrati laterali. Nell'angolo in alto a sinistra della tavola è posizionato un triomino a L, in modo che il quadrato centrale sia nell'angolo della tavola. Con una mossa si può ruotare di multipli di 90° il triomino a L attorno al centro di uno dei quadrati laterali. Per quali m e n è possibile che dopo un numero finito di mosse il triomino a L si trovi nell'angolo in basso a destra della tavola?

Buon lavoro e buona fortuna!