SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 14. Januar 2006

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Tripel (p, q, r) von Primzahlen, sodass auch die drei Differenzen

$$|p - q|, \quad |q - r|, \quad |r - p|$$

alle Primzahlen sind.

2. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Teilmengen $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, sodass für keine zwei Elemente $x, y \in A$ gilt $x + y = 2n + 1$.

3. Im Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ falle mit dem Inkreismittelpunkt von $\triangle ADC$ zusammen. Finde die Winkel von $\triangle ABC$.

4. Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = a + b + c.$$

5. Betrachte ein $m \times n$-Brett, das in Einheitsquadrate unterteilt ist. Ein L-Triomino besteht aus einem Zentrumsquadrat und zwei Schenkelquadraten, also insgesamt aus drei Einheitsquadraten. In der Ecke oben links liegt ein L-Triomino, sodass das Zentrumsquadrat auf dem Eckfeld liegt. In einem Zug kann das L-Triomino um den Mitelpunkt von einem der beiden Schenkelquadrate um Vielfache von 90° gedreht werden. Für welche m und n ist es möglich, dass das L-Triomino nach endlich vielen solchen Zügen in der unteren rechten Ecke zu liegen kommt?

Viel Glück!