OSM - Tour préliminaire

Bern, Zurich - le 15 janvier 2005

Durée: 2 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Dans un rectangle $ABCD$ donné, tel que $|AD| \leq |AB|$, soient M le milieu du segment AD et N le milieu du segment BC. Soit E la projection de B sur CM.

(a) Montrer que $ANEM$ est un trapèze isocèle.

(b) Montrer que l'aire du quadrilatère $ABNE$ vaut la moitié de l'aire de $ABCD$.

2. Montrer que dans un ennéagone (polygone à neuf côtés), il existe deux diagonales distinctes telles que les droites sur lesquelles elles se trouvent sont parallèles ou forment un angle plus petit que 7°.

3. Soient n et m deux nombres naturels premiers entre eux. Montrer que dans ce cas

$$m^3 + mn + n^3 \qquad \text{et} \qquad mn(m+n)$$

sont également premiers entre eux.

4. Soit ABC un triangle avec $\sphericalangle BAC = 60°$. Trouver tous les points P à l'intérieur du triangle qui ont la propriété suivante:

Si D est la projection de P sur BC, E la projection de P sur CA et F la projection de P sur AB, alors $\sphericalangle EDF = 30°$.

5. Soit M un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de possibilités de choisir trois sous-ensembles A, B, C de M tels que

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$
$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Bonne chance!