SMO - Vorrunde

Bern, Zürich - 10. Januar 2004

Zeit: 2 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen a, b und n, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$a! + b! = 2^n$$

2. Auf einem gewöhnlichen Schachbrett stehen 17 Türme. Zeige, dass man stets drei Türme auswählen kann, die sich gegenseitig nicht bedrohen. (Ein Turm kann in einem Zug beliebig viele Felder nach links, rechts, oben oder unten ziehen. Ein Turm bedroht einen anderen, falls er in einem Zug auf das Feld des anderen Turmes ziehen kann.)

3. Sei $ABCD$ ein Parallelogram. Die Punkte P und Q liegen im Innern von $ABCD$ auf der Diagonalen AC, dabei gilt $|AP| = |CQ| < \frac{1}{2}|AC|$. Die Gerade BP schneidet AD im Punkt E, die Gerade BQ schneidet CD in F. Zeige, dass EF parallel zur Diagonalen AC ist.

4. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit genau 100 verschiedenen positiven Teilern, sodass mindestens 10 dieser Teiler aufeinanderfolgende Zahlen sind.

5. $m \times n$ Punkte sind in einem quadratischen Gitter zu einem Rechteck angeordnet. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Punkte rot oder weiss zu färben, sodass unter je vier Punkten, die Ecken eines Einheitsquadrates bilden, genau zwei weisse und zwei rote vorkommen?

Viel Glück!