

Zeit: 4 Stunden

Aarburg

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

13. März 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine natürliche Zahl. Archi und Baldibus konstruieren eine Zahl auf einer Wandtafel, eine Ziffer nach der anderen. Am Anfang schreibt Archi eine der **neun** Ziffern von 1 bis 9 auf. Dann, beginnend mit Baldibus, führen beide Spieler abwechselnd folgende Schritte durch:

- Baldibus fügt eine der **zehn** Ziffern von 0 bis 9 an das **Ende** der aktuellen Zahl an.
- Archi fügt eine der **neun** Ziffern von 1 bis 9 an den **Anfang** der aktuellen Zahl an.

Archi gewinnt wenn, direkt nachdem Archi eine Ziffer aufgeschrieben hat, die Zahl auf der Tafel durch n teilbar ist. Bestimme die Werte von n , für welche Archi einen Sieg garantieren kann, egal was Baldibus macht.

2. Seien $n, k \geq 2$ und $a_1, a_2, \dots, a_k$ natürliche Zahlen, wobei $n < k < 2n$ und

$$2^n - 1 \mid 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}.$$

Beweise, dass mindestens drei der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$ denselben Rest bei der Division durch n haben.

3. Sei Ω ein Kreis mit Durchmesser $[AB]$ und C ein Punkt auf der Strecke $[AB]$. Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei Geraden, sodass die Projektionen von C auf beide dieser Geraden auf Ω liegen. Seien W und X die Schnittpunkte der Tangente an Ω in A mit ℓ_1 beziehungsweise ℓ_2 . Seien Y und Z die Schnittpunkte der Tangente an Ω in B mit ℓ_1 beziehungsweise ℓ_2 . Zeige, dass sich die Geraden WZ , XY und AB in einem Punkt schneiden.

4. Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(f(y)x+y) = f(x+2y) + f(y)x.$$

Zeit: 4 Stunden

Aarburg

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

14. März 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Wir nennen eine strikt monoton steigende Folge $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ von natürlichen Zahlen *unteilbar*, falls für alle $2 \leq k \leq 2026$ **keine** Summe von $k \geq 2$ aufeinanderfolgenden Termen durch k teilbar ist.

Beweise, dass solch eine unteilbare Folge existiert, und bestimme den kleinstmöglichen Wert des letzten Terms einer unteilbaren Folge.

6. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kreise, die sich bei T berühren, sodass Γ_2 innerhalb von Γ_1 liegt. Sei PQ eine Sehne von Γ_1 , die Γ_2 bei C berührt. Der Punkt $A \neq T$ liegt auf Γ_1 und AT schneidet Γ_2 in $B \neq T$. Die Gerade BC schneidet AP und AQ in X beziehungsweise Y . Zeige, dass TB den Winkel $\angle XTY$ halbiert.

7. Auf einer Wandtafel befinden sich endlich viele ganze Zahlen, alle mindestens 2. Pingu führt wiederholt folgenden Schritt aus: Zunächst wählt Pingu eine ganze Zahl $n \geq 2$, die zu allen momentan auf der Tafel stehenden Zahlen teilerfremd ist. Anschliessend ersetzt Pingu jede ganze Zahl x auf der Tafel durch die eindeutige Zahl $y \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, sodass $xy \equiv 1 \pmod{n}$.

Pingu hört auf, sobald am Ende eines Schrittes irgendwo auf der Tafel eine 1 steht. Wenn an diesem Punkt noch eine andere Zahl als 1 auf der Tafel steht, verliert Pingu. Andernfalls, wenn alle Zahlen 1 sind, gewinnt Pingu. Zeige, dass Pingu unabhängig von den Startzahlen immer gewinnen kann.

Beispiel: Wenn Pingu in einem Schritt $n = 11$ wählt, ersetzt Pingu 3, 8, 13, 8 durch 4, 7, 6, 7.

8. Es sind 2026 weisse Kugeln und 2026 schwarze Kugeln irgendwie in einer Reihe angeordnet. Ein *ausgewogenes Segment* ist ein nicht-leeres Segment aufeinanderfolgender Kugeln, das die gleiche Anzahl weisser wie schwarzer Kugeln enthält. Eine *ausgewogene Entfernung* ist der Vorgang, bei dem ein ausgewogenes Segment S ausgewählt wird, alle Kugeln in S entfernt werden und die Kugeln, die sich rechts von S befanden, nach links verschoben werden, sodass wieder eine zusammenhängende Reihe entsteht.

Bestimme die kleinste natürliche Zahl N , die die folgende Eigenschaft erfüllt: Für jede Startkonfiguration von Kugeln und für jede ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq 2026$ gibt es eine Folge von höchstens N ausgewogenen Entfernungen, nach welchen genau $2k$ Kugeln übrig bleiben.