

Temps: 4 heures

Aarburg

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

13 mars 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit n un entier strictement positif. Archi et Baldibus assemblent un entier sur un tableau noir, un chiffre après l'autre. Initialement, Archi écrit un des **neuf** chiffres de 1 à 9. Ensuite, en commençant par Baldibus, les deux joueurs alternent entre les actions suivantes :

- Baldibus ajoute un des **dix** chiffres de 0 à 9 à la **fin** du nombre actuel.
- Archi ajoute un des **neuf** chiffres de 1 à 9 au **début** du nombre actuel.

Archi gagne si, immédiatement après qu'Archi a écrit un chiffre, le nombre sur le tableau est divisible par n . Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles Archi peut garantir sa victoire, peu importe les choix de Baldibus.

2. Soient $n, k \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers strictement positifs, tels que $n < k < 2n$ et

$$2^n - 1 \mid 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}.$$

Montrer qu'au moins trois des nombres $a_1, a_2, \dots, a_k$ ont le même reste quand ils sont divisés par n .

3. Soit Ω un cercle de diamètre $[AB]$ et C un point sur le segment $[AB]$. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux droites telles que les projections de C sur ces dernières se trouvent sur Ω . Soient W et X les intersections de la tangente à Ω en A avec ℓ_1 et ℓ_2 , respectivement. Soient Y et Z les intersections de la tangente à Ω en B avec ℓ_1 et ℓ_2 , respectivement. Montrer que WZ , XY et AB s'intersectent en un point.

4. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(f(y)x+y) = f(x+2y) + f(y)x.$$

Temps: 4 heures

Aarburg

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

14 mars 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

5. Une suite strictement croissante $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ d'entiers strictement positifs est dite *indivisible* si, pour tout $2 \leq k \leq 2026$, **aucune** somme de k termes consécutifs n'est divisible par k .

Montrer qu'il existe une suite indivisible et déterminer la plus petite valeur possible du dernier terme d'une suite indivisible.

6. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles tangents en T , tels que Γ_2 soit à l'intérieur de Γ_1 . Soit PQ une corde de Γ_1 , tangente à Γ_2 en C . Le point $A \neq T$ appartient à Γ_1 et AT coupe Γ_2 en $B \neq T$. La droite BC coupe AP et AQ en X et Y , respectivement. Montrer que TB bissecte l'angle $\angle XTY$.

7. Il y a un nombre fini d'entiers sur un tableau noir, tous supérieurs ou égaux à 2. Pingu effectue de façon répétée l'action suivante : Pingu choisit d'abord un entier $n \geq 2$ qui est premier avec tous les entiers actuellement présents sur le tableau. Pingu remplace ensuite chaque entier x du tableau par l'unique entier $y \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que $xy \equiv 1 \pmod{n}$.

Pingu s'arrête dès qu'il y a un 1 quelque part sur le tableau à la fin d'une action. Si, à ce stade, il y a aussi un nombre différent de 1 sur le tableau, Pingu a perdu. Sinon, si tous les nombres sont égaux à 1, Pingu a gagné. Montrer que Pingu peut toujours gagner, quels que soient les entiers de départ.

Exemple : En une action, si Pingu choisit $n = 11$, Pingu remplace 3, 8, 13, 8 par 4, 7, 6, 7.

8. On a 2026 boules blanches et 2026 boules noires disposées en une rangée dans un certain ordre. Un *segment équilibré* est un segment non vide de boules consécutives qui contient le même nombre de boules blanches que de boules noires. Une *suppression équilibrée* est l'opération qui consiste à sélectionner un segment équilibré S , à supprimer toutes les boules de S et à déplacer vers la gauche les boules qui se trouvaient à droite de S afin que les boules restantes forment à nouveau une rangée contiguë.

Déterminer le plus petit entier positif N satisfaisant la propriété suivante : pour chaque configuration initiale de boules et pour chaque entier k satisfaisant $0 \leq k \leq 2026$, il existe une séquence d'au plus N suppressions équilibrées après laquelle il reste exactement $2k$ boules.