# Finalrunde 2025

## Erste Prüfung

Aarburg
21. März 2025

**Zeit:** 4 Stunden
**Schwierigkeit:** Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

**1.** Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck ohne parallele Seiten. Seien $X$ und $Y$ die Punkte auf $DA$, sodass $BX \parallel CD$ und $CY \parallel AB$. Sei $Z$ der Schnittpunkt der Geraden $BX$ und $CY$, und sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $BC$.

Zeige, dass die Gerade durch die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $ABX$ und $CDY$ senkrecht zur Geraden $MZ$ steht.

**2.** Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass

$$y \cdot \min\Big(f(xy),\ f(x)\Big) = \min\left(f\left(\frac{x}{y}\right),\ f(x)\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

**3.** Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die $n$ Pinguine $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nehmen an einem Wettkampf bestehend aus $n$ Rennen teil. Für jedes Rennen gibt es eine komplette Rangliste, ohne Unentschieden. Nach dem Wettkampf wählt jeder Pinguin $P_i$ zwei natürliche Zahlen $1 \leq a_i, b_i \leq n$ mit der Bedingung, dass es mindestens $a_i$ Rennen gab, in welchen $P_i$ einer der besten $b_i$ Plätze erreicht hat.

Bestimme den grösstmöglichen Wert von

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n).$$

**4.** Bestimme alle unendlichen Folgen $a_1, a_2, \ldots$ natürlicher Zahlen, sodass für alle $n \geq 2$ sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel aller $n$ aufeinanderfolgenden Terme natürliche Zahlen sind.

*Bemerkung: Die natürlichen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ haben arithmetisches Mittel $\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}$ und geometrisches Mittel $\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k}$.*

Viel Glück!

# Finalrunde 2025

## Zweite Prüfung

Aarburg
22. März 2025

**Zeit:** 4 Stunden
**Schwierigkeit:** Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

**5.** Bestimme alle Tripel $(p, q, a)$ natürlicher Zahlen, wobei $p$ und $q$ Primzahlen sind und

$$p^q - q^a = 2025$$

gilt.

**6.** Seien $n, a, b$ natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Aru und Wero spielen ein Spiel auf einem $n \times n$ Brett. Am Anfang liegt nur ein einziger Stein auf dem Feld ganz unten links. Ein Zug besteht darin ein Stein von einem Feld $S$ zu entfernen, und mindestens eine (möglicherweise beide) der folgenden Aktionen durchzuführen:

- $a$ Steine dem Feld rechts von $S$ hinzufügen;
- $b$ Steine dem Feld oberhalb von $S$ hinzufügen.

Aru beginnt und die beiden spielen abwechselnd Züge. Der erste Spieler, der keinen Zug ausführen kann, verliert. Bestimme in Abhängigkeit von $a, b$ und $n$, welcher Spieler (falls überhaupt jemand) eine Gewinnstrategie hat.

**7.** Bestimme alle Folgen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rationaler Zahlen, sodass für alle natürlichen $m$ der Wert

$$\frac{(x_1)^m + (x_2)^m + \cdots + (x_n)^m}{n}$$

die $m$-te Potenz einer rationaler Zahl ist.

**8.** Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB = AC$. Seien $D$ und $E$ Punkte auf $AB$, respektive $AC$. Sei $\omega_1$ der Kreis mit Mittelpunkt $D$ und Radius $DB$ und sei $\omega_2$ der Kreis mit Mittelpunkt $E$ und Radius $EC$. Nimm an, dass sich $\omega_1$ und $\omega_2$ zweimal schneiden und sei $P$ der Schnittpunkt näher bei $BC$. Ferner seien $F \neq B$ und $G \neq C$ die Schnittpunkte von $BC$ mit $\omega_1$, respektive $\omega_2$. Letztlich sei $Q$ der Schnittpunkt von $DF$ und $EG$, und sei $S$ der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden von $\angle QDP$ and $\angle PEQ$.

Zeige, dass die Umkreise von $SDQ$ und $SEP$ tangential zueinander sind.

Viel Glück!