MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2025

Premier examen

Aarburg
21 mars 2025

Temps: 4 heures
Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points: Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique sans côtés parallèles. Soient X et Y les points sur DA de telle sorte que $BX \parallel CD$ et $CY \parallel AB$. Soit Z l'intersection des droites BX et CY, et soit M le milieu du segment BC.

Montrer que la droite MZ est perpendiculaire à la droite joignant les centres des cercles circonscrits aux triangles ABX et CDY.

2. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$y \cdot \min\Big(f(xy),\ f(x)\Big) = \min\Big(f\Big(\frac{x}{y}\Big),\ f(x)\Big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Soit $n \geq 2$ un entier. Il y a n pingouins $P_1, P_2, \dots, P_n$ qui participent à un concours de n courses. Dans chaque course, tous les pingouins sont classés du premier au dernier, sans égalités. À la fin du concours, chaque pingouin P_i choisit deux entiers $1 \leq a_i, b_i \leq n$ tels que P_i y a au moins a_i courses où il a été classé parmi les b_i premiers pingouins.

Déterminer la plus grande valeur possible de

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n).$$

4. Trouver toutes les suites infinies $a_1, a_2, \dots$ d'entiers positifs telles que, pour tout entier $n \geq 2$, la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n'importe quels n termes consécutifs de la suite sont toutes deux entières.

Remarque : Les entiers $x_1, \dots, x_k > 0$ *ont une moyenne arithmétique* $\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}$ *et une moyenne géométrique* $\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k}$.

Bonne chance!

Tour final 2025

Second examen

Temps: 4 heures
Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points: Chaque exercice vaut 7 points.

Aarburg
22 mars 2025

5. Trouver tous les triplets (p, q, a) d'entiers strictement positifs tels que p et q sont des nombres premiers et l'équation

$$p^q - q^a = 2025$$

est vérifiée.

6. Soient n, a, b des entiers naturels tels que $n \geq 2$. Aru et Wero jouent au jeu suivant sur une grille $n \times n$. Initialement, une seule pierre se trouve sur la grille, située dans le coin inférieur gauche. Une opération consiste à retirer une pierre d'une case S non vide, et effectuer au moins l'une des actions suivantes (possiblement les deux) :

- ajouter a pierres à la case à la droite de S ;
- ajouter b pierres à la case au-dessus de S.

Aru commence et les deux joueuses effectuent leurs opérations à tour de rôle. La première joueuse qui ne peut plus effectuer d'opération perd. Déterminer, en termes de n, a, b, si une des joueuses a une stratégie gagnante, et si oui, laquelle des deux.

7. Déterminer toutes les suites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de nombres rationnels, telles que pour tous les entiers naturels m, la valeur

$$\frac{(x_1)^m + (x_2)^m + \cdots + (x_n)^m}{n}$$

est égale à un nombre rationnel élevé à la puissance m.

8. Soit ABC un triangle aigu tel que $AB = AC$. Soient D et E des points sur les segments AB et AC, respectivement. Soit ω_1 le cercle avec centre D et rayon DB et soit ω_2 le cercle avec centre E et rayon EC. Supposons que ω_1 et ω_2 s'intersectent en deux points et soit P l'intersection la plus proche de BC. Notons $F \neq B$ et $G \neq C$ les intersections de BC avec ω_1 et ω_2, respectivement. Finalement, les droites DF et EG s'intersectent en Q, et les bissectrices de QDP et PEQ s'intersectent en S.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SDQ et SEP sont tangents.

Bonne chance!