MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Round finale 2024

Primo giorno

Zürich
2 marzo 2024

Durata: 4 ore
Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Dati a e b interi positivi, si dice che a *quasi divide* b se a divide almeno uno tra $b-1$ e $b+1$. Diciamo che un intero positivo n é *quasi primo* se vale la seguente proprietà: per ogni coppia di interi positivi a, b tali che n quasi divide ab, vale che n quasi divide almeno uno tra a e b. Determinare tutti i numeri quasi primi.

2. Sia ABC un triangolo di incentro I, e sia J il simmetrico di I rispetto alla retta BC. Sia K la seconda intersezione della retta BC con la circonferenza circoscritta al triangolo CIJ, e L la seconda intersezione della retta BI con la circonferenza circoscritta al triangolo AIK. Dimostrare che le rette BC e JL sono parallele.

3. Siano a, b, c, d numeri reali positivi che soddisfino $ab^2 + ac^2 \geq 5bcd$. Determinare il più piccolo valore possibile del prodotto

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right).$$

4. Determinare la lunghezza massima L di una sequenza $a_1, \ldots, a_L$ di interi positivi che soddisfi entrambe le seguenti proprietà:

- ogni termine della sequenza é minore uguale a 2^{2024}, e
- per ogni sotto-successione di termini consecutivi $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ (dove $1 \leq i \leq j \leq L$) non esiste nessuna scelta di segni $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j \in \{1, -1\}$ tali che

$$s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j = 0.$$

Buona fortuna!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Round finale 2024

Secondo giorno

Zürich
3 marzo 2024

Durata: 4 ore
Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

5. La sala da ballo ghiacciata della Strega Bianca ha la forma di un quadrato, e il pavimento é tassellato da $n \times n$ piastrelle quadrate identiche. Inoltre, tra alcune coppie di piastrelle adiacenti ci sono dei lati magici. Edmund, fedele servitore della Strega Bianca, deve pulire tutto il pavimento. Comincia da una delle piastrelle d'angolo e ogni volta può spostarsi in avanti, indietro, a sinistra o a destra. Tuttavia, dal momento che il pavimento é scivoloso, scivolerà nella direzione scelta fino a urtare un muro o un lato magico. L'unico lato positivo é che indossa delle scarpe speciali, che puliscono ciascuna piastrella su cui scivola.

Determinare il minimo numero di lati magici necessari affinché Edmund possa pulire tutte le piastrelle.

6. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si assuma che la disugaglianza vale strettamente per qualche $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Dimostrare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ o $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Determinare tutte gli interi positivi n che soddisfano tutte le seguenti proprietà:

- esisono esattamente tre numeri primi distinti che dividono n,
- n é uguale a $\binom{m}{3}$ per qualche intero positivo m, e
- $n+1$ é un quadrato perfetto.

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico con $\angle BAD < \angle ADC$. Sia M il punto medio dell'arco CD che non contiene A. Sia P un punto interno ad $ABCD$ tale che $\angle ADB = \angle CPD$ e $\angle ADP = \angle PCB$. Dimostrare che le rette AD, PM, BC concorrono in un unico punto.

8. Buona fortuna!