MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2024

Erste Prüfung

Zürich

2. März 2024

Zeit: 4 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Für natürliche Zahlen a und b sagen wir *a teilt b fast*, falls a mindestens eine der Zahlen $b-1$ und $b+1$ teilt. Wir nennen n eine *fast-Primzahl*, wenn für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Falls n fast ab teilt, dann teilt n auch mindestens eine der Zahlen a oder b fast. Bestimme alle fast-Primzahlen.

2. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und sei J die Spiegelung von I an der Gerade BC. Weiter seien K der zweite Schnittpunkt von BC mit dem Umkreis des Dreiecks CIJ und L der zweite Schnittpunkt von BI mit dem Umkreis des Dreiecks AIK. Beweise, dass die Geraden BC und JL parallel sind.

3. Nehme an, dass a, b, c und d positive reelle Zahlen sind, welche $ab^2 + ac^2 \geq 5bcd$ erfüllen. Bestimme den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)$$

annehmen kann.

4. Bestimme die grösstmögliche Länge L einer Folge natürlicher Zahlen $a_1, \ldots, a_L$, welche die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Jedes Glied der Folge ist kleiner oder gleich 2^{2024}.
- Es existieren keine aufeinanderfolgende Teilfolge $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ (mit $1 \leq i \leq j \leq L$) und Auswahl an Vorzeichen $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j \in \{1, -1\}$ für welche gilt:

$$s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j = 0.$$

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2024

Zweite Prüfung

Zürich

3. März 2024

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Der eisige Ballsaal der Schneekönigin hat die Form eines Quadrates und der Boden ist mit $n \times n$ identischen quadratischen Platten belegt. Zwischen einigen benachbarten Bodenplatten gibt es magische Kanten. Kai, der treue Diener der Schneekönigin, muss den Boden des Ballsaales reinigen. Er beginnt in einer Ecke des Raumes und kann sich nach oben, unten, rechts oder links bewegen. Wenn Kai sich in eine Richtung bewegt, wird er auf dem Eis so lange in diese Richtung schlittern, bis er entweder eine Wand oder eine magische Kante erreicht. Da Kai spezielle Reinigungsschuhe trägt, wird immerhin jede Bodenplatte sauber, die er so besucht.

Bestimme die minimale Anzahl magischer Kanten, die platziert werden müssen, damit Kai alle Bodenplatten reinigen kann.

6. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Nimm an, die Ungleichung sei strikt für ein Paar $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

7. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- es existieren genau drei verschiedene Primzahlen, die n teilen,
- n ist gleich $\binom{m}{3}$ für eine positive ganze Zahl m und
- $n+1$ ist eine Quadratzahl.

8. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle BAD < \angle ADC$. Sei M der Mittelpunkt des Kreisbogens CD, welcher A nicht enthält. Nimm an, es gibt einen Punkt P innerhalb von $ABCD$, sodass $\angle ADB = \angle CPD$ und $\angle ADP = \angle PCB$. Zeige, dass die Geraden AD, PM und BC sich in einem Punkt schneiden.

Viel Glück!