MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2024

Premier examen

Zürich
2 mars 2024

Temps: 4 heures
Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points: Chaque exercice vaut 7 points.

1. Si a et b sont des entiers strictement positifs, on dit que a *quasi-divise* b si a divise au moins un des nombres $b-1$ et $b+1$. Un entier strictement positif n est *quasi-premier* si l'affirmation suivante est vérifiée : pour tous entiers strictement positifs a et b tels que n quasi-divise ab, alors n quasi-divise au moins un des nombres a et b. Déterminer tous les nombres quasi-premiers.

2. Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit, et J le symétrique du point I par rapport à la droite BC. Soit K la deuxième intersection de la droite BC avec le cercle circonscrit au triangle CIJ et L la deuxième intersection de la droite BI avec le cercle circonscrit au triangle AIK. Montrer que les droites BC et JL sont parallèles.

3. Supposons que les nombres réels positifs a, b, c, d vérifient l'inégalité $ab^2+ac^2 \geq 5bcd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right).$$

4. Déterminer la longueur maximale L d'une suite $a_1, \ldots, a_L$ d'entiers strictement positifs qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- chaque terme de la suite est plus petit ou égal à 2^{2024}, et
- il n'existe pas de sous-suite consécutive $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ (où $1 \leq i \leq j \leq L$) avec un choix de signes $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j \in \{1, -1\}$ pour lesquels

$$s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j = 0.$$

Bonne chance!

Tour final 2024

Second examen

Zürich
3 mars 2024

Temps: 4 heures
Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points: Chaque exercice vaut 7 points.

5. La salle de bal glacée de la Sorcière Blanche a la forme d'un carré, et le sol est couvert de $n \times n$ dalles carrées identiques. Entre certaines paires de dalles adjacentes il y a des arêtes magiques. Edmund, le fidèle serviteur de la Sorcière Blanche, doit nettoyer la salle de bal. Il commence sur une dalle d'un coin de la salle et peut aller en haut, en bas, à gauche ou à droite. Mais comme le sol est glissant, il va glisser dans cette direction jusqu'à qu'il rencontre un mur ou une arête magique. En revanche, il porte des chaussures spéciales qui nettoient chaque dalle sur laquelle il passe.

Déterminer le plus petit nombre d'arêtes magiques qui peuvent être placées pour qu'Edmund nettoie toutes les dalles.

6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que l'inégalité est stricte pour une certaine paire $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7. Déterminer tous les entiers strictement positifs n vérifiant les propriétés suivantes :

- il y a exactement trois nombres premiers distincts qui divisent n,
- n est égal à $\binom{m}{3}$ pour un certain entier strictement positif m, et
- $n+1$ est un carré parfait.

8. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que $\angle BAD < \angle ADC$. Soit M le milieu de l'arc CD qui ne contient pas A. Soit P un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ tel que $\angle ADB = \angle CPD$ et $\angle ADP = \angle PCB$. Montrer que les droites AD, PM, BC sont concourantes.

Bonne chance!