MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2023

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Aarburg
10. März 2023
Erste Prüfung

1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Auf dem Umkreis seien M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der kleineren Kreisbögen BC, CA beziehungsweise AB. Beweise, dass die Spiegelung von M_A an der Geraden IM_B auf dem Umkreis des Dreiecks IM_BM_C liegt.

2. Die Zauberer Albus und Brian spielen ein Spiel auf einem Quadrat mit Seitenlänge $2n+1$ Meter, das von Lava umgeben ist. Im Zentrum des Quadrates sitzt eine Kröte. In seinem Zug wählt ein Zauberer eine Richtung parallel zu einer der Seiten des Quadrates und verzaubert die Kröte. Die Kröte wird dadurch d Meter in die gewählte Richtung springen, wobei zu Beginn $d = 1$ gilt und nach jedem Sprung der Wert von d um 1 ansteigt. Der Zauberer, der die Kröte in die Lava springen lässt, verliert. Albus beginnt, und die Zauberer wechseln sich ab. Bestimme in Abhängigkeit von n, welcher Zauberer eine Gewinnstrategie hat.

3. Seien x, y und $a_0, a_1, a_2, \dots$ ganze Zahlen sodass $a_0 = a_1 = 0$ und

$$a_{n+2} = x \cdot a_{n+1} + y \cdot a_n + 1$$

für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ gilt. Sei p eine beliebige Primzahl. Zeige, dass $\operatorname{ggT}(a_p, a_{p+1})$ entweder gleich 1 oder grösser als $\sqrt{p}$ ist.

4. Bestimme den kleinstmöglichen Wert des Ausdrucks

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a+b+c = -1$ und $abc \leq -3$.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2023

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Aarburg
11. März 2023
Zweite Prüfung

5. Sei D die Menge aller reellen Zahlen mit Ausnahme von -1. Bestimme alle Funktionen $f\colon D \to D$ sodass für alle $x, y \in D$ mit $x \neq 0$ und $y \neq -x$, die Gleichung

$$\Big(f(f(x)) + y\Big) f\left(\frac{y}{x}\right) + f(f(y)) = x$$

erfüllt ist.

6. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$ sodass gilt:

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leq n \\ p,q \text{ prim}}} (p+q).$$

Bemerkung: Der Ausdruck auf der rechten Seite steht für das Produkt aller Summen zweier unterschiedlicher Primzahlen, welche beide nicht grösser als n sind. Für den Fall $n = 6$ ist dieser Wert gleich $(2+3)(2+5)(3+5)$.

7. Im spitzwinkligen Dreieck ABC ist F der Höhenfusspunkt von A und P ein Punkt auf der Strecke AF. Die Geraden durch P parallel zu AC und AB schneiden BC in D respektive E. Die Punkte $X \neq A$ und $Y \neq A$ liegen auf den Umkreisen der Dreiecke ABD, beziehungsweise ACE, sodass $DA = DX$ und $EA = EY$ gilt. Beweise, dass $BCXY$ ein Sehnenviereck ist.

8. Sei n eine natürliche Zahl. Zu Beginn hat Kimiko n Stapel mit jeweils einer Karte pro Stapel. Sie kann nun wiederholt eine gleiche Anzahl an Karten von zwei Stapeln nehmen und mit diesen einen neuen Stapel kreieren. Bestimme in Abhängigkeit von n die kleinstmögliche Anzahl nicht leerer Stapel, die Kimiko erreichen kann.

Viel Glück!