MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2023

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Aarburg
10 mars 2023
Premier examen

1. Soit ABC un triangle aigu et I le centre de son cercle inscrit. Sur son cercle circonscrit, soient M_A, M_B et M_C les milieux des arcs mineurs BC, CA et AB respectivement. Montrer que l'image de M_A par la réflexion d'axe IM_B se trouve sur le cercle circonscrit au triangle IM_BM_C.

2. Les magiciens Albus et Brian jouent à un jeu sur un carré de côté $2n+1$ mètres, qui est entouré de lave. Au centre du carré, il y a un crapaud. Quand c'est son tour, un magicien choisit une direction parallèle à un côté du carré et enchante le crapaud, qui fait un saut de d mètres dans la direction choisie, où d vaut initialement 1 et augmente de 1 à chaque saut. Le magicien qui envoie le crapaud dans la lave aura perdu. Albus commence et ils alternent ensuite chacun leur tour. Déterminer quel magicien a une stratégie gagnante, en fonction de n.

3. Soient x, y et $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des entiers satisfaisant $a_0 = a_1 = 0$ et

$$a_{n+2} = x \cdot a_{n+1} + y \cdot a_n + 1$$

pour tout entier $n \geq 0$. Soit p un nombre premier quelconque. Montrer que $\operatorname{pgcd}(a_p, a_{p+1})$ est soit égal à 1, soit strictement plus grand que $\sqrt{p}$.

4. Déterminer la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a},$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfont $a+b+c = -1$ et $abc \leq -3$.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2023

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Aarburg
11 mars 2023
Second examen

5. Soit D l'ensemble de tous les nombres réels différents de -1. Trouver toutes les fonctions $f\colon D \to D$ telles que pour tous $x, y \in D$ avec $x \neq 0$ et $y \neq -x$, l'équation

$$\Big(f(f(x)) + y\Big) f\left(\frac{y}{x}\right) + f(f(y)) = x$$

soit satisfaite.

6. Trouver tous les entiers $n \geq 3$ tels que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leq n \\ p,q \text{ premier}}} (p+q).$$

Remarque : L'expression de droite dénote le produit de toutes les sommes de deux nombres premiers distincts plus petits ou égaux à n. Pour le cas $n = 6$, ce serait $(2+3)(2+5)(3+5)$.

7. Dans le triangle aigu ABC, F est le pied de la hauteur de A et P est un point sur le segment AF. Les droites parallèles à AC et AB passant par le point P coupent BC en D et E respectivement. Les points $X \neq A$ et $Y \neq A$ sont sur les cercles circonscrits aux triangles ABD et ACE respectivement, tels que $DA = DX$ et $EA = EY$. Montrer que $BCXY$ est un quadrilatère cyclique.

8. Soit n un nombre entier strictement positif. Kimiko commence avec n tas d'un caillou chacun. Elle peut prendre un nombre égal de cailloux de deux tas, et les combiner pour en faire un nouveau tas. Déterminer le plus petit nombre de tas non-vides que Kimiko peut avoir, en fonction de n.

Bonne chance!