Finalrunde 2022

1. Prüfung
18. März 2022

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und sei AB ein Durchmesser von k. Ausserdem sei C ein Punkt auf k, so dass $AC = AM$ gilt. Sei D der Punkt auf der Geraden AC, so dass $CD = AB$ gilt und C zwischen A und D liegt. Seien E der zweite Schnittpunkt des Umkreises von BCD mit der Geraden AB und F der Schnittpunkt der Geraden ED und BC. Die Gerade AF schneidet die Strecke BD in X. Bestimme das Verhältnis BX/XD.

2. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweise, dass all die Zahlen

$$1^1,\ 3^3,\ 5^5,\ \ldots,\ (2^n-1)^{2^n-1}$$

bei Division durch 2^n unterschiedliche Reste haben.

3. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die beiden Gleichungen

- $f(f(m)f(n)) = mn$
- $f(2022a + 1) = 2022a + 1$

für alle positiven ganzen Zahlen m, n und a erfüllt sind.

4. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Die Schweiz und Liechtenstein führen ihre alljährliche Festvorstellung auf. Die Bühne ist in $n \times n$ Quadrate unterteilt, wobei das untere linke Quadrat ein rotes Haus mit k Schweizer Turnern enthält und das obere rechte Quadrat ein blaues Haus mit k Liechtensteiner Turnern. Jedes andere Quadrat bietet jeweils nur Platz für einen einzigen Turner. Jede Sekunde bewegt sich entweder ein Schweizer Turner oder ein Liechtensteiner Turner von seinem Quadrat auf ein direkt angrenzendes Quadrat. Schweizer Turner bewegen sich stets nach oben oder nach rechts und Liechtensteiner Turner bewegen sich stets nach unten oder nach links. Ziel ist es, alle Schweizer Turner in das blaue Haus und alle Liechtensteiner Turner in das rote Haus zu bringen, wobei ein Turner erst dann ein Haus betreten darf, wenn alle Turner der anderen Nationalität das Haus verlassen haben. Bestimme das grösste k abhängig von n, für welches dies möglich ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2022

2. Prüfung
19. März 2022

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Für eine ganze Zahl $a \geq 2$, bezeichne mit $\delta(a)$ den zweitgrössten Teiler von a. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von positiven ganzen Zahlen mit $a_1 \geq 2$ und

$$a_{n+1} = a_n + \delta(a_n)$$

für alle $n \geq 1$. Beweise, dass es eine positive ganze Zahl k gibt, so dass a_k durch 3^{2022} teilbar ist.

6. Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Annalena hat unendlich viele Kuhglocken in jeder von n verschiedenen Farben. Es stehen $m \geq n+1$ Kühe in einem Kreis und Annalena hat die Aufgabe, jeder Kuh eine Kuhglocke um den Hals zu binden, so dass jede Gruppe von $n+1$ aufeinanderfolgenden Kühen Glocken in allen möglichen n Farben hat. Beweise, dass dies nur für endlich viele Werte von m nicht möglich ist und bestimme das grösste solche m in Abhängigkeit von n.

7. Sei $n > 6$ eine perfekte Zahl. Sei $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ die Primfaktorzerlegung von n, wobei wir annehmen, dass $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ und $a_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Beweise, dass a_1 gerade ist.

Bemerkung: Eine ganze Zahl $n \geq 2$ heisst perfekte Zahl*, wenn die Summe ihrer positiven Teiler, ausser n selbst, gleich n ist. Zum Beispiel ist 6 eine perfekte Zahl, da ihre positiven Teiler $\{1, 2, 3, 6\}$ sind und $1 + 2 + 3 = 6$ ergibt.*

8. Sei ABC ein Dreieck und sei P ein Punkt im Inneren der Seite BC. Seien I_1 und I_2 die Inkreismittelpunkte der Dreiecke APB bzw. APC. Sei X der nächstgelegene Punkt zu A auf der Geraden AP, so dass XI_1 senkrecht auf XI_2 steht. Beweise, dass der Abstand AX unabhängig von der Wahl von P ist.

Viel Glück!