MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2022

Premier examen
18 mars 2022

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit k un cercle de centre M et AB un diamètre de k. De plus, soit C un point sur k tel que $AC = AM$. Soit D le point sur la droite AC tel que $CD = AB$ et tel que C se trouve entre A et D. Soit E la deuxième intersection du cercle circonscrit au triangle BCD avec la droite AB et F l'intersection des droites ED et BC. La droite AF coupe le segment BD en X. Déterminer le rapport BX/XD.

2. Soit n un nombre entier strictement positif. Montrer que les nombres

$$1^1,\ 3^3,\ 5^5,\ \ldots,\ (2^n-1)^{2^n-1}$$

ont tous des restes différents quand ils sont divisés par 2^n.

3. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les deux équations

- $f(f(m)f(n)) = mn$
- $f(2022a+1) = 2022a+1$

sont vérifiées pour tous les nombres entiers strictement positifs m, n et a.

4. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. La Suisse et le Liechtenstein présentent leur spectacle festif annuel. Il y a un champ subdivisé en $n \times n$ carrés. Le carré en bas à gauche contient une maison rouge avec k gymnastes suisses, et le carré en haut à droite contient une maison bleue avec k gymnastes liechtensteinois. Chaque autre carré a seulement la place pour un seul gymnaste à la fois. Chaque seconde, soit un gymnaste suisse, soit un gymnaste liechtensteinois se déplace. Les gymnastes suisses se déplacent en allant sur le carré au-dessus ou le carré à droite et les gymnastes liechtensteinois se déplacent en allant soit sur le carré au-dessous ou le carré à gauche. Le but est que tous les gymnastes suisses se déplacent jusqu'à la maison bleue, et que tous les gymnastes liechtensteinois se déplacent jusqu'à la maison rouge, tout en sachant qu'un gymnaste ne peut pas entrer dans une maison avant que tous les gymnastes de l'autre nationalité l'aient quittée. Déterminer la valeur maximale de k en fonction de n pour laquelle cela est possible.

Bonne chance!

Tour final 2022

Second examen

19 mars 2022

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

5. Pour un nombre entier $a \geq 2$, on dénote par $\delta(a)$ le deuxième plus grand diviseur de a. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers telle que $a_1 \geq 2$ et

$$a_{n+1} = a_n + \delta(a_n)$$

pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un nombre entier strictement positif k tel que a_k est divisible par 3^{2022}.

6. Soit $n \geq 3$ un nombre entier. Annalena a une infinité de cloches à vache de chaque couleur parmi n couleurs différentes. Étant donné un entier $m \geq n+1$ et un groupe de m vaches en cercle, la mission d'Annalena est d'accrocher une cloche autour du cou de chaque vache, pour que chaque groupe de $n+1$ vaches adjacentes aient des cloches de toutes les n couleurs possibles. Montrer qu'il existe seulement un nombre fini de valeurs de m pour lesquelles c'est impossible et déterminer la plus grande valeur d'un tel m en fonction de n.

7. Soit $n > 6$ un nombre parfait. Soit $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n, où l'on suppose que $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ et $a_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Montrer que a_1 est pair.

Remarque : Un nombre entier $n \geq 2$ est un nombre parfait *si la somme de ses diviseurs positifs, excepté n lui-même, vaut n. Par exemple, 6 est un nombre parfait, car ses diviseurs positifs sont $\{1, 2, 3, 6\}$ et $1 + 2 + 3 = 6$.*

8. Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur du côté BC. Soient I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits aux triangles APB et APC, respectivement. Soit X le point le plus proche de A sur la droite AP tel que XI_1 est perpendiculaire à XI_2. Montrer que la distance AX est indépendante du choix de P.

Bonne chance!