MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2021

1. Prüfung

19. Februar 2021

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei (m, n) ein Paar von natürlichen Zahlen. Julia hat sorgfältig m Reihen mit jeweils n Löwenzahn in einem $m \times n$ Raster in ihrem Garten gepflanzt. Nun spielen Jana und Viviane ein Spiel mit einem Rasenmäher, den sie gerade gefunden haben. Jana beginnt, und nacheinander können sie jeweils alle Löwenzahn in einer geraden horizontalen oder vertikalen Linie mähen (und sie müssen mindestens einen Löwenzahn mähen!). Diejenige, die den letzten Löwenzahn mäht, gewinnt das Spiel. Bestimme alle Paare (m, n), für welche Jana eine Gewinnstrategie hat.

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB = AC$ und sei D ein Punkt auf der Seite BC. Der Kreis mit Mittelpunkt D durch C schneidet den Umkreis von ABD in P und Q, wobei Q der Punkt näher bei B ist. Die Gerade BQ schneidet AD in X und AC in Y. Beweise, dass $PDXY$ ein Sehnenviereck ist.

3. Finde alle Mengen von natürlichen Zahlen S mit mindestens zwei Elementen, sodass wenn $m > n$ zwei Elemente von S sind, dann ist

$$\frac{n^2}{m-n}$$

auch ein Element von S.

4. Die reellen Zahlen a, b, c, d sind positiv und erfüllen $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Finde das Minimum von

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2021

2. Prüfung

20. Februar 2021

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Für welche ganzen Zahlen $n \geq 2$ können wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in einer Reihe anordnen, sodass für alle ganzen Zahlen $1 \leq k \leq n$ die Summe der ersten k Zahlen in der Reihe durch k teilbar ist?

6. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) - n < 2021 \quad \text{und} \quad \underbrace{f(f(\cdots f(f}_{f(n)}(n))\cdots)) = n.$$

Beweise, dass $f(n) = n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

7. Seien $m \geq n$ natürliche Zahlen. Frieder werden mn Poster von Linus mit unterschiedlichen ganzzahligen Dimensionen $k \times l$ mit $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq l \leq n$ überreicht. Eines nach dem anderen muss er alle Poster an seiner Schlafzimmerwand aufhängen ohne sie zu rotieren. Jedes Poster das er aufhängt kann entweder auf einen freien Platz an der Wand gehängt werden, oder an einen Platz wo es ein einziges sichtbares Poster komplett überdeckt und kein anders sichtbares Poster überlappt. Bestimme die minimale Fläche der Wand die am Ende mit Poster bedeckt ist.

8. Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$ und $\angle BAC = 20°$. Sei D der Punkt auf der Seite AB sodass $\angle BCD = 70°$. Sei E der Punkt auf der Seite AC sodass $\angle CBE = 60°$. Bestimme den Wert vom $\angle CDE$.

Viel Glück!