MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2021

Premier examen
19 février 2021

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit (m, n) une paire d'entiers strictement positifs. Julia a scrupuleusement planté m rangées de n pissenlits dans son jardin de telle manière que les pissenlits forment une grille de taille $m \times n$. Jana et Viviane décident de jouer à un jeu avec une tondeuse qu'elles viennent de trouver. L'une après l'autre, en commençant par Jana, elles tondent tous les pissenlits dans une rangée ou dans une colonne (et elles doivent toujours tondre au moins un pissenlit). La gagnante est celle qui tond le dernier pissenlit. Déterminer toutes les paires (m, n) pour lesquelles Jana a une stratégie gagnante.

2. Soit ABC un triangle aigu avec $AB = AC$ et soit D un point sur le côté BC. Le cercle de centre D passant par C intersecte le cercle circonscrit au triangle ABD en P et Q, où Q est le point le plus proche de B. La droite BQ coupe la droite AD en X et la droite AC en Y. Montrer que le quadrilatère $PDXY$ est inscrit.

3. Trouver tous les ensembles finis S d'entiers strictement positifs contenant au moins deux éléments, tels que si $m > n$ appartiennent à S, alors

$$\frac{n^2}{m-n}$$

appartient aussi à S.

4. Les nombres réels a, b, c, d sont strictement positifs et satisfont $(a+c)(b+d) = ac + bd$. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2021

Second examen

20 février 2021

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

5. Pour quels entiers $n \geq 2$ peut-on ordonner les nombres $1, 2, \ldots, n$ dans une rangée de sorte que, pour tout entier $1 \leq k \leq n$, la somme des k premiers nombres dans la rangée est divisible par k ?

6. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) - n < 2021 \quad \text{et} \quad \underbrace{f(f(\cdots f(f}_{f(n)}(n))\cdots)) = n.$$

Montrer que $f(n) = n$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$.

7. Soient $m \geq n$ des entiers strictement positifs. On confie à Frieder mn posters de Linus, tous avec des dimensions entières différentes $k \times l$ où $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq l \leq n$. Il doit tous les accrocher, un par un, sur le mur de sa chambre sans les pivoter. Chaque fois qu'il accroche un nouveau poster, il peut soit le placer sur un emplacement libre du mur, ou de manière à ce qu'il recouvre complètement un poster déjà accroché sans pour autant chevaucher un autre poster déjà accroché. Déterminer l'aire minimale du mur qui sera recouverte par des posters.

8. Soit ABC un triangle avec $AB = AC$ et $\angle BAC = 20°$. Soit D le point sur le côté AB tel que $\angle BCD = 70°$. Soit E le point sur le côté AC tel que $\angle CBE = 60°$. Déterminer la valeur de l'angle $\angle CDE$.

Bonne chance!