MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2020

1. Prüfung

28. Februar 2020

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m) + f(n) \mid m + n.$$

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Seien M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, respektive AB. Seien M_A', M_B' und M_C' die Mittelpunkte der Kreisbögen über den jeweiligen Seiten BC, CA und AB auf dem Umkreis von ABC. Sei P_A der Schnittpunkt der Gerade M_BM_C und der Senkrechten zu $M_B'M_C'$ durch A. Definiere P_B und P_C analog. Zeige, dass die Geraden M_AP_A, M_BP_B und M_CP_C sich in einem Punkt schneiden.

3. Es liegen n verschiedene Rechtecke in der Ebene. Beweise, dass unter den $4n$ rechten Innenwinkeln mindestens $4\sqrt{n}$ verschiedene sind.

4. Sei φ die Eulersche Phi-Funktion. Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$2^{n(n+1)} \mid 32 \cdot \varphi\left(2^{2^n} - 1\right).$$

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2020

2. Prüfung

29. Februar 2020

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Finde alle natürlichen Zahlen a, b, c, für welche gilt:

$$a! \cdot b! = a! + b! + c!.$$

6. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Betrachte das folgende Spiel: Zu Beginn sind k Steine auf den n^2 Feldern eines $n \times n$ Schachbretts verteilt. Ein Zug besteht darin, ein Feld, welches mindestens so viele Steine wie angrenzende Felder hat, auszuwählen (zwei Felder sind *angrenzend*, falls sie eine gemeinsame Seite haben) und ein Stein von diesem Feld auf alle angrenzenden Felder zu bewegen.

Finde alle natürlichen Zahlen k, für welche gilt:

(a) Es gibt eine Startkonfiguration mit k Steinen, sodass kein Zug möglich ist.

(b) Es gibt eine Startkonfiguration mit k Steinen, sodass eine unendlich lange Folge von Zügen möglich ist.

7. Sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AD > BC$. Sei X der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und BC. Sei E der Schnittpunkt von DB mit der Parallelen zu der Winkelhalbierenden von $\angle CBD$ durch X und sei F der Schnittpunkt von DC mit der Parallelen zu der Winkelhalbierenden von $\angle DCB$ durch X. Zeige, dass $AEFD$ ein Sehenviereck ist.

8. Sei n eine natürliche Zahl. Seien $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ reelle Zahlen sodass

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

gilt. Beweise, dass $x_1 x_n \leq -1/n$ gilt.

Viel Glück!