MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2020

Premier examen
28 février 2020

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$
$$f(m) + f(n) \mid m + n.$$

2. Soit ABC un triangle aigu. Soient M_A, M_B et M_C les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB. Soient M'_A, M'_B et M'_C les milieux respectifs des arcs mineurs BC, CA et AB sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit P_A l'intersection de la droite M_BM_C et de la perpendiculaire à $M'_BM'_C$ par A. Les points P_B et P_C sont définis de manière analogue. Montrer que les droites M_AP_A, M_BP_B et M_CP_C se coupent en un point.

3. Soient n rectangles distincts dans le plan. Montrer que parmi les $4n$ angles droits intérieurs des rectangles, au moins $4\sqrt{n}$ sont différents.

4. Soit φ la fonction phi d'Euler. Montrer que pour tous les nombres entiers strictement positifs n
$$2^{n(n+1)} \mid 32 \cdot \varphi\left(2^{2^n} - 1\right).$$

Bonne chance!

Tour final 2020

Second examen

29 février 2020

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

5. Trouver tous les entiers strictement positifs a, b, c tels que

$$a! \cdot b! = a! + b! + c!.$$

6. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On considère le jeu suivant : au début, k pierres sont disposées sur les n^2 cases d'un échiquier $n \times n$. Un coup consiste à choisir une case qui contient au moins autant de pierres qu'elle n'a de cases voisines (deux cases sont *voisines* si elles ont un côté en commun) et à déplacer une pierre de la case choisie vers chacune des cases voisines.

Trouver tous les nombres entiers strictement positifs k tels que :

(a) Il existe une configuration de départ avec k pierres telle qu'aucun coup n'est possible.

(b) Il existe une configuration de départ avec k pierres telle qu'une suite infinie de coups est possible.

7. Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que $AD > BC$. Soit X l'intersection de la bissectrice de l'angle $\angle BAC$ avec la droite BC. Soit E l'intersection de la droite DB avec la parallèle à la bissectrice de l'angle $\angle CBD$ par X. Soit F l'intersection de la droite DC avec la parallèle à la bissectrice de l'angle $\angle DCB$ par X. Montrer que $AEFD$ est un quadrilatère inscrit.

8. Soit n un nombre entier strictement positif. Soient $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ des nombres réels tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Montrer que $x_1 x_n \leq -1/n$.

Bonne chance!