MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2019

1. Prüfung

1. März 2019

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei A ein Punkt und sei k ein Kreis durch A. Seien B und C zwei weitere Punkte auf k. Sei nun X der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit k. Sei Y die Spiegelung von A am Punkt X, und D der Schnittpunkt der Geraden YC mit k. Zeige, dass der Punkt D nicht von der Wahl von B und C auf dem Kreis k abhängt.

2. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und M eine Teilmenge von $\mathbb{P}$ mit mindestens drei Elementen, sodass folgende Eigenschaft gilt: Für jede natürliche Zahl k und für jede Teilmenge $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ von M mit $A \neq M$ sind alle Primfaktoren von $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$ in M. Zeige, dass $M = \mathbb{P}$ gilt.

3. Bestimme alle periodischen Folgen positiver reeller Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, sodass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

4. Sei n eine natürliche Zahl. In einer Reihe stehen $n+1$ Schüsseln, die von links nach rechts mit den Zahlen $0, 1, \ldots, n$ nummeriert sind. Am Anfang liegen n Steine in der Schüssel 0 und kein Stein in den anderen Schüsseln. Sisyphus will diese n Steine in die Schüssel n bewegen. Dafür bewegt Sisyphus in jedem Zug genau einen Stein von einer Schüssel mit $k \geq 1$ Steinen um höchstens k Schüsseln nach rechts. Sei T die minimale Anzahl Züge, die Sisyphus benötigt, um alle Steine in die Schüssel n zu bewegen. Zeige, dass gilt:

$$T \geq \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil.$$

Bemerkung: Für eine reelle Zahl x ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die grösser als oder gleich x ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Finalrunde 2019

2. Prüfung

2. März 2019

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

5. Eine Gruppe von Kindern sitzt im Kreis. Am Anfang hat jedes Kind eine gerade Anzahl Bonbons. In jedem Schritt muss jedes Kind die Hälfte seiner Bonbons dem Kind zu seiner Rechten abgeben. Sollte ein Kind nach einem Schritt eine ungerade Anzahl Bonbons haben, bekommt es vom Kindergärtner ein zusätzliches Bonbon geschenkt. Zeige, dass nach einer endlichen Anzahl Schritten alle Kinder gleich viele Bonbons haben.

6. Zeige, dass keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ existiert, sodass für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

7. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$. Nehme an, dass ein Punkt D im Inneren des Dreiecks ABC existiert, sodass $AD = BD$ und $CD = AC$. Zeige, dass $\angle ACB = 3 \cdot \angle DCB$.

8. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heisst *resistent*, wenn sie teilerfremd zur Summe ihrer Teiler ist (inklusive 1 und n). Was ist die maximale Anzahl aufeinanderfolgender resistenter Zahlen?

Viel Glück!