MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2019

Premier examen

1 mars 2019

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit A un point et k un cercle passant par A. Soient B et C deux autres points sur k. Soit X l'intersection de la bissectrice de $\angle ABC$ avec k et soit Y l'image de A par la symétrie de centre X. Finalement, soit D l'intersection de la droite YC avec k. Montrer que le point D ne dépend pas du choix des points B et C sur le cercle k.

2. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers et M un sous-ensemble de $\mathbb{P}$ ayant au moins trois éléments. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout sous-ensemble $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de M tel que $A \neq M$, tous les facteurs premiers du nombre $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$ se trouvent dans M. Montrer que $M = \mathbb{P}$.

3. Déterminer toutes les suites périodiques $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de nombres réels strictement positifs telles que pour tout $n \geq 1$

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

4. Soit n un nombre entier strictement positif. On dispose de $n+1$ urnes alignées. Les urnes sont numérotées de gauche à droite à l'aide des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$. Au départ, n pierres sont déposées dans l'urne 0 et toutes les autres urnes sont vides. Sisyphe souhaite déplacer les n pierres jusqu'à l'urne n. Pour ce faire, à chaque tour, Sisyphe déplace une pierre d'une urne contenant $k \geq 1$ pierres d'au plus k urnes vers la droite (la pierre ne peut pas dépasser la dernière urne). Soit T le nombre minimal de tours nécessaires pour amener toutes les pierres dans l'urne n. Montrer que

$$T \geq \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil.$$

Remarque : pour un nombre réel x, $\lceil x \rceil$ dénote le plus petit nombre entier qui est plus grand ou égal à x.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Tour final 2019

Second examen

2 mars 2019

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

5. Un groupe d'enfants est assis en cercle. Au début, chaque enfant possède un nombre pair de bonbons. À chaque tour, chaque enfant donne la moitié de ses bonbons à l'enfant assis à sa droite. Si, après un tour, un enfant possède un nombre impair de bonbons, le professeur lui donne un bonbon supplémentaire. Montrer qu'après un nombre fini de tours tous les enfants auront le même nombre de bonbons.

6. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

7. Soit ABC un triangle avec $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$. On suppose qu'il existe un point D à l'intérieur du triangle ABC tel que $AD = BD$ et $CD = AC$. Montrer que $\angle ACB = 3 \cdot \angle DCB$.

8. On appelle un nombre naturel $n \geq 2$ *résistant* s'il est premier avec la somme de tous ses diviseurs (1 et n inclus). Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres résistants consécutifs ?

Bonne chance!