SMO - Finalrunde 2018

1. Prüfung - 16. März 2018

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Alle Felder eines 8×8 Quadrats sind anfangs weiss gefärbt. In einem Zug darf man alle Felder eines horizontalen oder vertikalen 1×3 Rechtecks umfärben (alle weissen Felder werden schwarz und alle schwarzen Felder weiss). Ist es möglich, dass nach einer endlichen Anzahl Zügen alle Felder schwarz gefärbt sind?

2. Seien a, b und c natürliche Zahlen. Finde den kleinsten Wert, den folgender Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{a}{\operatorname{ggT}(a+b, a-c)} + \frac{b}{\operatorname{ggT}(b+c, b-a)} + \frac{c}{\operatorname{ggT}(c+a, c-b)}.$$

Bemerkung: $\operatorname{ggT}(6,0) = 6$ *und* $\operatorname{ggT}(3,-6) = 3$.

3. Finde alle natürlichen Zahlen n, für die kein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) existiert, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$n = \frac{a \cdot \operatorname{kgV}(b,c) + b \cdot \operatorname{kgV}(c,a) + c \cdot \operatorname{kgV}(a,b)}{\operatorname{kgV}(a,b,c)}.$$

4. Sei D ein Punkt im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, sodass $\angle BAD = \angle DBC$ und $\angle DAC = \angle BCD$. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ADB. Nehme an, P befinde sich ausserhalb des Dreiecks ABC. Eine Gerade durch P schneide den Strahl BA in X und den Strahl CA in Y, sodass $\angle XPB = \angle PDB$ gilt. Zeige, dass sich BY und CX auf AD schneiden.

Bemerkung: Für zwei Punkte F und G bezeichnet der Strahl FG alle Punkte auf der Geraden FG, die sich auf der selben Seite von F befinden wie G.

5. Zeige, dass keine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f(xf(x) + yf(y)) = xy.$$

Viel Glück!

SMO - Finalrunde 2018

2. Prüfung - 17. März 2018

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei k der Inkreis des Dreiecks ABC mit Inkreismittelpunkt I. Der Kreis k berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E, respektive F. Sei G der Schnittpunkt der Geraden AI und des Kreises k, der zwischen A und I liegt. Nehme an, BE und FG seien parallel. Zeige, dass $BD = EF$ gilt.

7. Sei n eine natürliche Zahl. Sei k die Anzahl Möglichkeiten, n als Summe von einer oder mehreren aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen. Zeige, dass k der Anzahl ungerader positiver Teiler von n entspricht.

Beispiel: 9 hat drei ungerade positive Teiler und $9 = 9,\ 9 = 4 + 5,\ 9 = 2 + 3 + 4.$

8. Seien a, b, c, d und e positive reelle Zahlen. Bestimme den grössten Wert, den folgender Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + 2c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

9. Sei n eine natürliche Zahl und G die Menge der Punkte (x, y) in der Ebene, sodass x und y ganze Zahlen mit $1 \leq x, y \leq n$ sind. Eine Teilmenge von G heisst *parallelogrammfrei*, wenn sie keine vier nicht-kollineare Punkte enthält, die die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Wie viele Elemente kann eine parallelogrammfreie Teilmenge von G höchstens enthalten?

10. Sei $p \geq 2$ eine Primzahl. Louis und Arnaud wählen abwechselnd einen Index $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, der bisher noch nicht gewählt wurde, und eine Ziffer $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Louis beginnt. Wenn alle Indizes ausgewählt wurden, berechnen sie die folgende Summe:

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \cdot 10^i.$$

Wenn diese Summe durch p teilbar ist, gewinnt Louis, ansonsten gewinnt Arnaud. Zeige, dass Louis eine Gewinnstrategie hat.

Viel Glück!