SMO - Finalrunde 2017

1. Prüfung - 10. März 2017

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Seien A und B Punkte auf dem Kreis k mit Mittelpunkt O, sodass $AB > AO$ gilt. Sei C der von A verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle OAB$ und k. Sei D der von B verschiedene Schnittpunkt der Geraden AB mit dem Umkreis des Dreiecks OBC. Zeige, dass $AD = AO$ gilt.

2. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

3. Das Hauptgebäude der ETH Zürich ist ein in Einheitsquadrate unterteiltes Rechteck. Jede Seite eines Quadrates ist eine Wand, wobei gewisse Wände Türen haben. Die Aussenwand des Hauptgebäudes hat keine Türen. Eine Anzahl von Teilnehmern der SMO hat sich im Hauptgebäude verirrt. Sie können sich nur durch Türen von einem Quadrat zum anderen bewegen. Wir nehmen an, dass zwischen je zwei Quadraten des Hauptgebäudes ein begehbarer Weg existiert.

Cyril möchte erreichen, dass sich die Teilnehmer wieder finden, indem er alle auf dasselbe Quadrat führt. Dazu kann er ihnen per Walkie-Talkie folgende Anweisungen geben: Nord, Ost, Süd oder West. Nach jeder Anweisung versucht jeder Teilnehmer gleichzeitig, ein Quadrat in diese Richtung zu gehen. Falls in der entsprechenden Wand keine Türe ist, bleibt er stehen.

Zeige, dass Cyril sein Ziel nach endlich vielen Anweisungen erreichen kann, egal auf welchen Quadraten sich die Teilnehmer am Anfang befinden.

4. Sei n eine natürliche Zahl und p, q Primzahlen, sodass folgende Aussagen gelten:

$$pq \mid n^p + 2,$$
$$n + 2 \mid n^p + q^p.$$

Zeige, dass es eine natürliche Zahl m gibt, sodass $q \mid 4^m n + 2$ gilt.

5. Sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$. Sei P der Schnittpunkt von BC und der Tangente durch A am Umkreis des Dreiecks ABC. Sei Q der Punkt auf der Geraden AC, sodass $AQ = AB$ gilt und A zwischen C und Q liegt. Seien X respektive Y die Mittelpunkte von BQ respektive AP. Sei R der Punkt auf AP, sodass $AR = BP$ gilt und R zwischen A und P liegt. Zeige, dass $BR = 2XY$ gilt.

Viel Glück!

SMO - Finalrunde 2017

2. Prüfung - 11. März 2017

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Das SMO-Lager hat mindestens vier Leiter. Je zwei Leiter sind entweder gegenseitig befreundet oder verfeindet. In jeder Gruppe von vier Leitern gibt es mindestens einen, der mit den drei anderen befreundet ist. Gibt es immer einen Leiter, der mit allen anderen befreundet ist?

7. Sei n eine natürliche Zahl, sodass es genau 2017 verschiedene Paare natürlicher Zahlen (a, b) gibt, welche die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

erfüllen. Zeige, dass n eine Quadratzahl ist.

Bemerkung: $(7, 4) \neq (4, 7)$

8. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A und $AB > BC$. Sei k der Kreis mit Zentrum A durch B und C. Sei H der zweite Schnittpunkt von k mit der Höhe des Dreiecks ABC durch B. Weiter sei G der zweite Schnittpunkt von k mit der Schwerlinie durch B im Dreieck ABC. Sei X der Schnittpunkt der Geraden AC und GH. Zeige, dass C der Mittelpunkt der Strecke AX ist.

9. Betrachte ein konvexes 15-Eck mit Umfang 21. Zeige, dass man davon drei paarweise verschiedene Eckpunkte auswählen kann, die ein Dreieck mit Fläche kleiner als 1 bilden.

10. Seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $xy + yz + zx = 1$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{4}{x+y+z} \leq (x+y)(\sqrt{3}z+1).$$

Viel Glück!