OSM - Tour final 2017

Premier examen - 10 mars 2017

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soient A et B des points sur un cercle k de centre O tels que $AB > AO$. Soit C le deuxième point d'intersection de la bissectrice de $\angle OAB$ avec k. Soit D le deuxième point d'intersection de la droite AB avec le cercle circonscrit au triangle OBC. Montrer que $AD = AO$.

2. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

3. Le bâtiment de maths de l'EPFL est un rectangle subdivisé en pièces carrées agencées en damier. Certains des murs délimitant les pièces ont une porte. Aucune porte ne donne sur l'extérieur du bâtiment. Un certain nombre de participants de la SMO s'est perdu dans le bâtiment. On peut passer d'une pièce à une pièce adjacente uniquement en empruntant une porte. On suppose que de chaque pièce on peut se rendre à n'importe quelle autre pièce.

Louis aimerait rassembler tous les participants dans une même pièce. Pour les guider, il peut leur donner par Talkie-Walkie les instructions suivantes : nord, est, sud ou ouest. Après une indication, chaque participant essaie simultanément de franchir le mur dans la direction donnée. Si le mur correspondant n'a pas de porte, le participant reste dans la pièce où il se trouve.

Montrer que Louis peut rassembler les participants dans une même pièce en donnant un nombre fini d'indications, quelle que soit la position de départ des participants.

4. Soit n un entier naturel et p, q des nombres premiers tels que :

$$pq \mid n^p + 2,$$
$$n + 2 \mid n^p + q^p.$$

Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que $q \mid 4^m n + 2$.

5. Soit ABC un triangle avec $AC > AB$. Soit P le point d'intersection de BC avec la tangente au cercle circonscrit au triangle ABC passant par A. Soit Q le point sur la droite AC tel que $AQ = AB$ et tel que A soit entre C et Q. Soient X, resp. Y le milieu de BQ, resp. AP. Soit R le point sur AP tel que $AR = BP$ et tel que R soit entre A et P. Montrer que $BR = 2XY$.

Bonne chance !

OSM - Tour final 2017

Second examen - 11 mars 2017

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

6. Au camp SMO, il y a au moins quatre Romands. Deux Romands sont soit mutuellement amis, soit mutuellement ennemis. Dans chaque groupe de quatre Romands, au moins un des Romands est ami avec les trois autres. Existe-t-il toujours un Romand qui est ami avec tous les autres ?

7. Soit n un nombre naturel, tel que exactement 2017 paires (a, b) de nombres naturels satisfont l'équation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}.$$

Montrer que n est un carré parfait.

Remarque : $(7, 4) \neq (4, 7)$

8. Soit ABC un triangle isocèle en A avec $AB > BC$. Soit k le cercle de centre A passant par B et C. Soit H le deuxième point d'intersection de k avec la hauteur du triangle ABC passant par B. De plus, soit G le deuxième point d'intersection de k avec la médiane du triangle ABC passant par B. Soit X le point d'intersection des droites AC et GH. Montrer que C est le milieu du segment AX.

9. Soit un polygone convexe à 15 côtés et de périmètre 21. Montrer qu'il existe trois sommets différents de ce polygone qui forment un triangle d'aire strictement inférieure à 1.

10. Soient x, y, z des nombres réels positifs ou nuls avec $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$\frac{4}{x + y + z} \leq (x + y)(\sqrt{3}z + 1).$$

Bonne chance !