SMO - Finalrunde

1. Prüfung - 11. März 2016

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 60°$. Sei E der Punkt auf der Seite BC, sodass $2\angle BAE = \angle ACB$ gilt. Sei D der zweite Schnittpunkt von AB und dem Umkreis des Dreiecks AEC und sei P der zweite Schnittpunkt von CD und dem Umkreis des Dreiecks DBE. Berechne den Winkel $\angle BAP$.

2. Seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks, das heisst: $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{ab+1}{a^2+ca+1} + \frac{bc+1}{b^2+ab+1} + \frac{ca+1}{c^2+bc+1} > \frac{3}{2}.$$

3. Finde alle natürlichen Zahlen n, für welche Primzahlen p, q existieren, sodass gilt:

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

4. In der Ebene liegen 2016 verschiedene Punkte. Zeige, dass zwischen diesen Punkten mindestens 45 verschiedene Distanzen auftreten.

5. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle ACB = 90°$ und M der Mittelpunkt von AB. Sei G ein beliebiger Punkt auf der Strecke MC und P ein Punkt auf der Geraden AG, sodass $\angle CPA = \angle BAC$ gilt. Weiter sei Q ein Punkt auf der Geraden BG, sodass $\angle BQC = \angle CBA$ gilt. Zeige, dass sich die Umkreise der Dreiecke AQG und BPG auf der Strecke AB schneiden.

Viel Glück!

SMO - Finalrunde

2. Prüfung - 12. März 2016

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei a_n eine Folge natürlicher Zahlen definiert durch $a_1 = m$ und $a_n = a_{n-1}^2 + 1$ für $n > 1$. Ein Paar (a_k, a_l) nennen wir *interessant*, falls

(i) $0 < l - k < 2016$,

(ii) a_k teilt a_l.

Zeige, dass ein m existiert, sodass die Folge a_n kein interessantes Paar enthält.

7. Auf einem Kreis liegen $2n$ verschiedene Punkte. Die Zahlen 1 bis $2n$ werden zufällig auf diese Punkte verteilt. Jeder Punkt wird mit genau einem anderen Punkt verbunden, sodass sich keine der entstehenden Verbindungsstrecken schneiden. Verbindet eine Strecke die Zahlen a und b, so weisen wir der Strecke den Wert $|a - b|$ zu. Zeige, dass wir die Strecken so wählen können, dass die Summe dieser Werte n^2 ergibt.

8. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei G der Schnittpunkt der Parallelen von AB durch H und der Parallelen von AH durch B. Sei I der Punkt auf der Geraden GH, sodass AC die Strecke HI halbiert. Sei J der zweite Schnittpunkt von AC und dem Umkreis des Dreiecks CGI. Zeige, dass $IJ = AH$ gilt.

9. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für eine n-elementige Teilmenge F von $\{1, \ldots, 2n\}$ definieren wir $m(F)$ als das Minimum aller kgV (x, y), wobei x und y zwei verschiedene Elemente von F sind. Bestimme den maximalen Wert von $m(F)$.

10. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + yf(x + y)) = y^2 + f(xf(y + 1)).$$

Viel Glück!