SMO - Finalrunde

1. Prüfung - 13. März 2015

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq BC$ und Umkreis k. Seien P und Q die Schnittpunkte von k mit der Winkelhalbierenden beziehungsweise der Aussenwinkelhalbierenden von $\angle CBA$. Sei D der Schnittpunkt von AC und PQ. Bestimme das Verhältnis $AD : DC$.

2. Bestimme alle Paare (m, p) natürlicher Zahlen, sodass p eine Primzahl und

$$2^m p^2 + 27$$

die dritte Potenz einer natürlichen Zahl ist.

3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

4. Gegeben seien ein Kreis k und zwei Punkte A und B ausserhalb des Kreises. Gib an, wie man mit Zirkel und Lineal einen Kreis ℓ konstruieren kann, sodass A und B auf ℓ liegen und sich k und ℓ berühren.

5. Sei m eine natürliche Zahl. Auf der SMO-Wandtafel steht 2^m mal die Zahl 1. In einem Schritt wählen wir zwei Zahlen a und b auf der Tafel und ersetzen sie beide jeweils durch $a+b$.
Zeige, dass nach $m2^{m-1}$ Schritten die Summe der Zahlen mindestens 4^m beträgt.

Viel Glück!

SMO - Finalrunde

2. Prüfung - π-Tag

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Wir haben ein 8×8 Brett. Eine *innere Kante* ist eine Kante zwischen zwei 1×1 Feldern. Wir zerschneiden das Brett in 1×2 Dominosteine. Für eine innere Kante k bezeichnet $N(k)$ die Anzahl Möglichkeiten, das Brett so zu zerschneiden, dass entlang der Kante k geschnitten wird. Berechne die letzte Ziffer der Summe, die wir erhalten, wenn wir alle $N(k)$ addieren, wobei k eine innere Kante ist.

7. Seien a, b, c reelle Zahlen, sodass gilt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Bestimme alle Werte, welche folgender Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

8. Sei $ABCD$ ein Trapez, wobei AB und CD parallel sind. P sei ein Punkt auf der Seite BC. Zeige, dass sich die Parallelen zu AP und PD durch C respektive B auf DA schneiden.

9. Sei p eine ungerade Primzahl. Bestimme die Anzahl Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

1) $1 \leq a_i \leq p$ für alle $i = 1, \ldots, p$.
2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ ist nicht durch p teilbar.
3) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_{p-1}a_p + a_pa_1$ ist durch p teilbar.

10. Finde die grösste natürliche Zahl n, sodass für alle reellen Zahlen a, b, c, d folgendes gilt:

$$(n+2)\sqrt{a^2+b^2} + (n+1)\sqrt{a^2+c^2} + (n+1)\sqrt{a^2+d^2} \geq n(a+b+c+d).$$

Viel Glück!