OSM - Tour final

Premier examen - 13 mars 2015

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soient ABC un triangle aigu avec $AB \neq BC$ et k son cercle circonscrit. Soient P et Q les points d'intersection de k avec la bissectrice intérieure, respectivement extérieure, de $\angle CBA$. Soit D le point d'intersection de AC et PQ. Calculer le rapport $\frac{AD}{DC}$.

2. Trouver toutes les paires (m, p) de nombres naturels, telles que p est un nombre premier et que

$$2^m p^2 + 27$$

est le cube d'un nombre naturel.

3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

4. Soient un cercle k et de deux points A et B à l'extérieur du cercle. Donner une construction à la règle et au compas, en la justifiant, d'un cercle ℓ qui passe par A et B et qui est tangent à k.

5. Soit m un nombre naturel. Sur le tableau de l'OSM est écrit 2^m fois le nombre 1. À chaque étape, on choisit deux nombres a et b sur le tableau et on les remplace tous deux par $a+b$.
Montrer qu'après $m2^{m-1}$ étapes la somme des nombres vaut au moins 4^m.

Bonne chance !

OSM - Tour final

Deuxième examen - jour de π

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Nous disposons d'un échiquier 8×8. Une *arête intérieure* est une arête qui sépare deux carrés unité 1×1. Nous découpons l'échiquier en dominos 1×2. Pour une arête intérieure k, on note $N(k)$ le nombre de découpages de l'échiquier dans lesquels l'arête k est découpée. Déterminer le dernier chiffre de la somme que l'on obtient en additionnant tous les $N(k)$, où k est une arête intérieure.

7. Soient a, b, c des nombres réels tels que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Déterminer toutes les valeurs que peut prendre l'expression :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

8. Soit $ABCD$ un trapèze, où AB et CD sont parallèles. Soit P un point sur le côté BC. Montrer que les parallèles à AP et PD passant par C, respectivement B, se coupent sur DA.

9. Soit p un nombre premier impair. Déterminer le nombre de p-uplets $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de nombres naturels avec les propriétés suivantes :

1) $1 \leq a_i \leq p$ pour tout $i = 1, \dots, p$.
2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ n'est pas divisible par p.
3) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots a_{p-1} a_p + a_p a_1$ est divisible par p.

10. Déterminer le plus grand nombre naturel n tel que pour tous nombres réels a, b, c, d :

$$(n+2)\sqrt{a^2+b^2} + (n+1)\sqrt{a^2+c^2} + (n+1)\sqrt{a^2+d^2} \geq n(a+b+c+d).$$

Bonne chance !