SMO Finalrunde 2013

erste Prüfung - 8. März 2013

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass die Mengen

$$\Big\{ \mathrm{ggT}(a,b),\ \mathrm{ggT}(b,c),\ \mathrm{ggT}(c,a),\ \mathrm{kgV}(a,b),\ \mathrm{kgV}(b,c),\ \mathrm{kgV}(c,a) \Big\}$$

und

$$\{2, 3, 5, 30, 60\}$$

gleich sind.

Bemerkung: Zum Beispiel sind die Mengen $\{1, 2013\}$ *und* $\{1, 1, 2013\}$ *gleich.*

2. Seien n eine natürliche Zahl und $p_1, ..., p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeige, dass gilt:

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 > n^3.$$

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle ADC = \angle DBA$. Ferner sei E die Projektion von A auf BD. Zeige, dass $BC = DE - BE$ gilt.

4. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$f\left(\frac{x}{y+1}\right) = 1 - xf(x+y) \quad \text{für alle} \quad x > y > 0\ .$$

5. Jeder von $2n + 1$ Schülern wählt eine endliche, nichtleere Menge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Zwei Schüler sind befreundet, falls sie eine gemeinsame Zahl ausgewählt haben. Jeder Schüler ist mit mindesten n anderen Schülern befreundet. Zeige, dass es einen Schüler gibt, welcher mit allen anderen befreundet ist.

Viel Glück !

SMO Finalrunde 2013

zweite Prüfung - 9. März 2013

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Auf einem Tisch stehen zwei nichtleere Stapel mit n respektive m Münzen. Folgende Operationen sind erlaubt:

- Von beiden Stapeln wird jeweils die gleiche Anzahl Münzen entfernt.
- Die Anzahl Münzen eines Stapels wird verdreifacht.

Für welche Paare (n, m) ist es möglich, dass nach endlich vielen Operationen keine Münzen mehr vorhanden sind?

7. Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC mit $AB \neq AC$. Ferner seien S und T Punkte auf den Strahlen AB beziehungsweise AC, sodass $\angle ASO = \angle ACO$ und $\angle ATO = \angle ABO$ gelten. Zeige, dass ST die Strecke BC halbiert.

8. Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen. Zeige die folgende Ungleichung:

$$a^2 \cdot \frac{a-b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{b-c}{b+c} + c^2 \cdot \frac{c-a}{c+a} \geq 0 \ .$$

Wann gilt Gleichheit?

9. Finde alle Quadrupel (p, q, m, n) natürlicher Zahlen, sodass p und q Primzahlen sind und die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$p^m - q^3 = n^3.$$

10. Sei $ABCD$ ein Tangentenviereck mit $BC > BA$. Der Punkt P liege so auf der Strecke BC, dass $BP = BA$ gilt. Zeige, dass sich die Winkelhalbierende von $\angle BCD$, die Senkrechte zu BC durch P und die Senkrechte zu BD durch A in einem Punkt schneiden.

Viel Glück !