SMO – Turno finale 2012

Prima prova - 9 marzo 2012

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

1. 2012 camaleonti siedono a un tavolo rotondo. Inizialmente ogni camaleonte è di colore rosso oppure verde. Allo scoccare di ogni minuto ogni camaleonte che siede tra due camaleonti dello stesso colore cambia il suo colore. Tutti gli altri mantengono il loro colore. Dimostra che dopo 2012 minuti ci sono almeno due camaleonti che hanno cambiato colore lo stesso numero di volte.

2. Determina tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 6.$$

3. I cerchi k_1 e k_2 si intersecano nei punti D e P. La tangente comune ai due cerchi che giace dalla stessa parte del punto D interseca k_1 nel punto A e k_2 nel punto B. La retta AD interseca k_2 una seconda volta nel punto C. Sia M il punto medio della corda BC. Dimostra che $\angle DPM = \angle BDC$.

4. Dimostra che non esiste nessuna successione infinita di numeri primi $p_1, p_2, p_3, \ldots$ tale per cui per ogni k vale $p_{k+1} = 2p_k - 1$ oppure $p_{k+1} = 2p_k + 1$. Nota che non necessario che valga la stessa formula per tutti i valori di k.

5. Sia n un numero naturale. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_k$ k sottoinsiemi distinti di cardinalità 3 dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$, tali che $|A_i \cap A_j| \neq 1$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$. Determina tutti i valori di n per i quali esistono n sottoinsiemi di questo tipo.

Buon lavoro!

SMO – Turno finale 2012

Seconda prova - 10 marzo 2012

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

6. Sia $ABCD$ un parallelogramma con almeno un angolo di ampiezza $\neq 90°$ e sia k il cerchio circoscritto al triangolo ABC. Sia E il punto su k diametralmente opposto a B. Dimostra che il cerchio circoscritto a ADE e k hanno il raggio della stessa misura.

7. Siano n e k due numeri naturali tali che $n = 3k + 2$. Dimostra che la somma di tutti i divisori di n è divisibile per 3.

8. Considera un cubo e due vertici A e B alle estremità di una diagonale di una sua faccia. Un *cammino* è una successione di spigoli del cubo che in ogni passaggio connette un vertice del cubo con uno dei suoi tre vertici adiacenti. Sia a il numero di cammini di lunghezza 2012 che iniziano in A e terminano in A, e sia b il numero di cammini di lunghezza 2012 che iniziano in A e terminano in B. Stabilisci quale tra i numeri a e b è il più grande.

9. Siano $a, b, c > 0$ tre numeri reali tali che $abc = 1$. Dimostra che

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(b+c)^2}{bc}, \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Quando vale l'uguaglianza?

10. Sia O un punto interno a un triangolo acutangolo ABC. Siano A_1, B_1 e C_1 le proiezioni del punto O sui lati BC, AC e AB. Sia P il punto d'intersezione della retta perpendicolare a B_1C_1 passante per A con la retta perpendicolare a A_1C_1 passante per B. Sia H la proiezione del punto P su AB. Dimostra che i punti A_1, B_1, C_1 e H giacciono su uno stesso cerchio.

Buon lavoro!