SMO Finalrunde 2012

erste Prüfung - 9. März 2012

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Es sitzen 2012 Chamäleons an einem runden Tisch. Am Anfang besitzt jedes die Farbe rot oder grün. Nach jeder vollen Minute wechselt jedes Chamäleon, welches zwei gleichfarbige Nachbarn hat, seine Farbe von rot zu grün respektive von grün zu rot. Alle anderen behalten ihre Farbe. Zeige, dass es nach 2012 Minuten mindestens 2 Chamäleons gibt, welche gleich oft die Farbe gewechselt haben.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 6.$$

3. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten D und P. Die gemeinsame Tangente an die beiden Kreise auf der Seite von D berührt k_1 in A und k_2 in B. Die Gerade AD schneidet k_2 ein zweites Mal in C. Sei M der Mittelpunkt der Sehne BC. Zeige, dass $\angle DPM = \angle BDC$ gilt.

4. Zeige, dass es keine unendliche Folge von Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gibt, welche für jedes k $p_{k+1} = 2p_k - 1$ oder $p_{k+1} = 2p_k + 1$ erfüllt. Beachte, dass nicht für jedes k die gleiche Formel gelten muss.

5. Sei n eine natürliche Zahl. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ verschiedene 3-elementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, sodass $|A_i \cap A_j| \neq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Bestimme alle n, für die es n solche Teilmengen gibt.

Viel Glück !

SMO Finalrunde 2012

zweite Prüfung - 10. März 2012

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit mindestens einem Winkel ungleich $90°$ und k der Umkreis des Dreiecks ABC. Sei E der auf k diametral gegenüberliegende Punkt von B. Zeige, dass der Umkreis des Dreiecks ADE und k den gleichen Radius haben.

7. Seien n und k natürliche Zahlen sodass $n = 3k + 2$. Zeige, dass die Summe aller Teiler von n durch 3 teilbar ist.

8. Betrachte einen Würfel und zwei seiner Ecken A und B, welche die Endpunkte einer Flächendiagonalen sind. Ein *Weg* ist eine Folge von Würfelecken, wobei in jedem Schritt von einer Ecke längs eine Würfelkante zu einer der drei benachbarten Ecken gegangen wird. Sei a die Anzahl Wege der Länge 2012, die im Punkt A beginnen und in A enden und sei b die Anzahl Wege der Länge 2012, die in A beginnen und in B enden. Entscheide, welche der beiden Zahlen a und b die grössere ist.

9. Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen mit $abc = 1$. Zeige

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(b+c)^2}{bc}, \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Wann gilt Gleichheit?

10. Sei O ein innerer Punkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Seien A_1, B_1 und C_1 die Projektionen von O auf die Seiten BC, AC und AB. Sei P der Schnittpunkt der Senkrechten zu B_1C_1 respektive A_1C_1 durch die Punkte A respektive B. Sei H die Projektion von P auf AB. Zeige, dass die Punkte A_1, B_1, C_1 und H auf einem Kreis liegen.

Viel Glück !