SMO Finalrunde 2011

erste Prüfung - 11. März 2011

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. An einer Party sitzen 2011 Leute mit je einem Glas Sirup in der Hand an einem runden Tisch. Zu jedem Zeitpunkt wird unter Beachtung der folgenden Regeln angestossen:

(a) Es wird nicht übers Kreuz angestossen.

(b) Jeder kann zu jedem Zeitpunkt nur mit jemandem anstossen.

Wieviele Zeitpunkte vergehen mindestens, bis jeder mit jedem angestossen hat?

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Seien D, E bzw. F Punkte auf BC, CA bzw. AB, sodass gilt:

$$\angle AFE = \angle BFD, \quad \angle BDF = \angle CDE, \quad \angle CED = \angle AEF$$

Zeige, dass D, E und F die Fusspunkte der Höhen sind.

3. Finde den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$|2011^m - 45^n|$$

für natürliche Zahlen m und n annehmen kann.

4. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $a, b, c, d > 0$ mit $abcd = 1$ gilt:

$$(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) = (a + b)(c + d)$$

5. Die Tangenten in A und B an den Umkreis des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt T. Der Kreis durch die Punkte A, B und T schneidet BC und AC nochmals in D bzw. E und CT schneidet BE in F. Nehme an, dass D der Mittelpunkt von BC ist. Berechne das Verhältnis $BF : FE$.

Viel Glück !

SMO Finalrunde 2011

zweite Prüfung - 12. März 2011

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Seien $a, b, c, d > 0$ positive reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{2}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}$$

7. Finde alle ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$, sodass

$$2^z + 2 = r^2$$

wobei $r \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl ist.

8. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Die Parallele zu AB durch H schneidet BC in P und AD in Q. Die Parallele zu BC durch H schneidet AB in R und CD in S. Zeige, dass P, Q, R und S auf einem Kreis liegen.

9. Sei n eine natürliche Zahl. Sei $f(n)$ die Anzahl Teiler von n, die mit der Ziffer 1 oder 9 enden und sei $g(n)$ die Anzahl Teiler von n die mit der Ziffer 3 oder 7 enden. Zeige, dass $f(n) \geq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

10. Auf jedem Feld eines Schachbretts sitzen zwei Kakerlaken. Jede Kakerlake kriecht auf ein benachbartes Feld. Dabei kriechen die Kakerlaken, die auf dem gleichen Feld waren, auf verschiedene Felder. Welches ist die maximale Anzahl Felder, die frei werden kann?

Viel Glück !