SMO – Turno finale 2010

primo esame - 12 marzo 2010

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Tre monete sono posizionate su dei punti interi sulla retta reale. A ogni tappa del gioco scegli due monete e spostane una di 1 a destra e l'altra di 1 a sinistra. Per quali posizioni iniziali è possibile spostare tutte le monete in un solo punto con una sequenza di tappe.

2. Sia ABC un triangolo, $AB \neq AC$ e I il centro del suo cerchio inscritto. Siano D, E e rispettivamente F i punti sui lati BC, CA e rispettivamente AB toccati dal cerchio inscritto. Sia M il punto medio di EF. Sia P il punto di intersezione (diverso da D) della retta AD con il cerchio inscritto. Dimostra che $PMID$ è un quadrilatero inscritto in un cerchio.

3. Sia n un numero naturale. Determina il numero di coppie di numeri naturali (a, b) tali che

$$(4a - b)(4b - a) = 2010^n.$$

4. Siano $x, y, z > 0$ numeri reali tali che $xyz = 1$. Dimostra la disuguaglianza

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x + y + z.$$

5. Considera gli n vertici di un poligono regolare e uniscili con lati o diagonali del poligono in modo da formare un percorso chiuso passante per ogni vertice esattamente una volta. Una *coppia parallela* è un insieme di due segmenti paralleli in questo percorso. Dimostra:

(a) Se n è pari, allora esiste sempre almeno una coppia parallela.

(b) Se n è dispari, allora non esiste mai esattamente una coppia parallela.

SMO – Turno finale 2010

secondo esame - 13 marzo 2010

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

6. Determina tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano la seguente uguaglianza per qualsiasi coppia x, y di numeri reali:

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y).$$

7. Siano m e n dei numeri naturali. Supponi che $m+n+1$ sia un numero primo che divide $2(m^2 + n^2) - 1$. Dimostra che $m = n$.

8. In un Comune con almeno un abitante ci sono molteplici associazioni. Ogni abitante del Comune è membro di almeno k associazioni e non ci sono due associazioni che hanno più di un membro in comune. Mostra che ci sono almeno k associazioni che hanno lo stesso numero di membri.

9. Siano k e k' due cerchi concentrici con centro O, e sia k' il cerchio più grande. Considera una retta passante per O che interseca k in A e k' in B, in modo che O si trovi tra A e B; e un'altra retta passante per O che interseca k in E e k' in F, in modo che E si trovi tra O e F. Dimostra che il cerchio circostcritto a OAE, il cerchio con diametro AB e il cerchio con diametro EF si intersecano in un punto.

10. Sia P un poligono convesso con $n \geq 3$ vertici. Dimostra che è possibile suddividere P in triangoli per mezzo di $n - 3$ diagonali che non si intersecano, in modo che il cerchio circoscritto a ogni triangolo contiene tutto P. Quand'è che una tale decomposizione è unica?